

პეტრე ბაბილუა

მათემატიკის გაკვეთილი - უსასრულო კვადრატული ფესვები

ყველა მოსწავლელის მოვალეობაა ეროვნული სასწავლო გეგმის მიხედვით საგნის მიზნების და ამოცანების შესრულება. სწავლების მიზნები მრავალფეროვანია და ცხადია, ყველა მათგანის მიღწევა ერთი კონკრეტული გაკვეთილის (აქტივობის) ფარგლებში შეუძლებელია. მათემატიკის სწავლების მიზნებიდან განსაკუთრებით მინდა გამოვყო შემდეგი:

მსჯელობა-დასაბუთება: ვარაუდის გამოთქმა და კერძო შემთხვევებში მისი კვლევა

პრობლემების გადაჭრა: კომპლექსური (რთული) პრობლემის საფეხურებად, მარტივ ამოცანებად დაყოფა და ეტაპობრივად გადაჭრა (ამოხსნა), მათ შორის სტანდარტული მიდგომებისა და პროცედურების გამოყენებით.

მნიშვნელოვანია, ისეთი გაკვეთილის დაგეგმვა და ჩატარება, რაც მოსწავლეების კვლევითი უნარების განვითარებას უწყობს ხელს. ასეთი ტიპის უნარების ეფექტურად განვითარება ხდება კონსტრუქტივისტული გაკვეთილების დაგეგმვით და ჩატარებით. მინდა გაგიზიაროთ ჩემ მიერ ჩატარებული გაკვეთილი, რომელიც მიზნად ისახავდა კვლევითი ტიპის უნარების განვითარებას მათემატიკაში.

სკოლაში, რომელშიც ვასწავლი მათემატიკას, ფუნქციონირებს საერთაშორისო ბაკალავრიატის პროგრამა. პროგრამა საინტერესოა და განსაკუთრებით თავისი შეფასების სისტემით გამოირჩევა, შეფასებით მოწმდება ოთხი უნარი:

A-ფაქტობრივი ცოდნა,

B-კვლევითი და კანონზომიერების აღმოჩენის უნარი,

C-კომუნიკაცია და მათემატიკური ენის გამოყენების უნარი,

D-რეალური პრობლემის გადაწყვეტის (ამოხსნის) უნარი.

ჩემ მიერ მათემატიკაში მეათე კლასში ჩატარებული გაკვეთილის მიზანი იყო B-კვლევითი და კანონზომიერების აღმოჩენის უნარის შემოწმება მოსწავლეებში. მინდა გაგიზიაროთ ჩემი გამოცდილება.

მიზანი: მოსწავლეებში კვლევითი და კანონზომიერებების აღმოჩენის უნარების განვითარება. ესგ-ს მიხედვით: მათ.X.3, მათ.X.4, მათ.X.7.

გაკვეთილის თემა: უსასრულო კვადრატული ფესვები

წინარე ცოდნა: მოქმედებები რადიკალებზე, ტექნოლოგიების გამოყენება გამოთვლებში, კვადრატული განტოლების ამოხსნა.

რესურსები: პერსონალური კომპიუტერი საოფისე პროგრამებით, ფურცელი, კალამი.

გაკვეთილი დავიწყე წინარე ცოდნის გააქტიურებით და შემდეგ მოსწავლეებს შესასრულებლად მივეცი დავალება:

$$X = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}$$

გამოსახულება წარმოადგენს უსასრულო კვადრატული ფესვის მაგალითს. ზოგიერთი უსასრულო კვადრატული ფესვი შეიძლება ჩაწარილ იქნეს მთელი რიცხვის სახით.

შეასრულეთ ქვემოთ მოცემული დავალებები:

1. გამოიყენეთ ტექნოლოგიები და გამოთვალეთ მძიმის შემდეგ ექვსი ციფრის სიზუსტით:

ა) $\sqrt{2}$

ბ) $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

გ) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

დ) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$

ე) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$

2. გააგრძელე ეს პროცესი და იწინასწარმეტყველე X -ის მნიშვნელობა.
3. გამოიყენე განტოლებები და იპოვე X -ის მნიშვნელობა (მითითება: X^2 გამოსახე X -ის საშუალებით).
4. გამოიყენე 3-ში მიღებული შედეგი და იპოვე უსასრულო კვადრატული ფესვებით 3-ის წარმოდგენა.
5. როგორ შეიძლება განზოგადდეს მიღებული შედეგი ნებისმიერი რიცხვის უსასრულო ფესვების წარმოდგენისათვის.

ამის შემდეგ ხდება მოსწავლეთა ნამუშევრების პრეზენტაცია და შეფასება, ასევე ვისმენტ და ვაჯამებთ მოსწავლეების მიერ გამოთქმულ მოსაზრებებს.

შეფასება: მოსწავლეთა ნამუშევრების შეფასება მოხდება შემდეგი კრიტერიუმების მიხედვით:

ქულა	აღწერა
0	მოსწავლე ვერ ასრულებს ვერც ერთ დავალებას
1-3	მოსწავლეს შეუძლია:

	მიჰყვეს ინსტრუქციას, მასწავლებლის დახმარებით იყენებს მათემატიკურ ცოდნას მარტივი კანონზომიერების დასადგენად; აკეთებს შესაბამის მარტივ წინასწარმეტყველებებს
4-5	მოსწავლეს შეუძლია: გამოიყენოს მათემატიკური ცოდნა კანონზომიერების დასადგენად; გამოთქვამს ვარაუდებს, თუ როგორ შეიძლება იმუშაოს ამ კანონზომიერებამ
6-9	მოსწავლეს შეუძლია: გამოიყენოს მათემატიკური ცოდნა კანონზომიერების დასადგენად; შეუძლია ამ კანონზომიერებაზე დაყრდნობით წინასწარმეტყველებების გაკეთება; აზოგადებს მიღებულ შედეგებს
10	მოსწავლე ასრულებს ყველა დავალებას, აკეთებს სწორ დასკვნებს, აკეთებს ზუსტ წინასწარმეტყველებებს, აზოგადებს მიღებულ შედეგს, აკეთებს მიღებული შედეგების შეფასებას

რეფლექსია: ჩატარებული გაკვეთილის ანალიზმა მომცა გარკვეული დასკვნების გამოტანის საშუალება. კერძოდ, მოსწავლეების 95%-მა თავი გაართვა პირველ დავალებას, რაც გულისხმობდა გამოთვლების შესრულებას გარკვეული სიზუსტით. მოსწავლეთა 80%-მა ასევე წარმატებით გაართვა თავი მეორე დავალებას, რაც თავის მხრივ გულისხმობდა პირველ დავალებაზე დაკვირვებას და დასკვნის გაკეთებას. შედარებით რთული აღმოჩნდა მესამე დავალება, მას თავი გაართვა მოსწავლეთა 40%-მა, რაც მოითხოვდა სათანადო ცოდნის გამოყენებას განტოლებებზე და ფასვებზე. მოსწავლეთა მხოლოდ 2%-მა უპასუხა მეოთხე დავალებას და მხოლოდ ერთმა მოსწავლემ შეძლო მეხუთე დავალების შესრულება. ანალიზი ცხადყოფს, რომ მოსწავლეებს უჭირთ ამ ტიპის დავალებების შესრულება, ვინაიდან ყოველდღიურ სწავლებაში ისინი ძირითადად ყურადღებას აქცევენ უფრო ფაქტობრივ ცოდნას. ამ გაკვეთილის შემდეგ უკვე ერთად (აქ მასწავლებელი შემოიფარგლა მხოლოდ მითითებებით და კითხვების დასმით) გავარჩიეთ და გავაანალიზეთ მიღებული შედეგები. მოსწავლეებმა გამოთქვეს სურვილი ასეთი ტიპის დავალებების უფრო ხშირად შესრულებაზე.

გაკვეთილის შედეგების განხილვის შემდეგ დავგეგმე პირველი გაკვეთილის გაგრძელება

პირველი გაკვეთილის უკუკავშირი დავიწყე შეკითხვით:

- რა პასუხები მივიღეთ პირველ დავალებაში?

აქ მოსწავლეთა მიერ მიღებული პასუხები, ერთმანეთს დაემთხვა და გამოიკვეთა შემდეგი:

ა) $\sqrt{2} = 1.144214$

ბ) $\sqrt{2 + \sqrt{2}} = 1.847759$

გ) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = 1.961570$

დ) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} = 1.990369$

$$g) \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} = 1.997590$$

აქვე მინდა დავამატო, რომ რამოდენიმე მოსწავლეს კომპიუტერთან პროგრამის გამოყენებასთან დაკავშირებით შეექმნა ტექნიკური პრობლემა, მაგრამ თავად მოსწავლეები დაეხმარნენ მათ პრობლემის მოგვარებაში.

მოსწავლეებს მივმართე შეკითხვით:

რა დასკვნის გამოტანა შეგიძლიათ მიღებული პასუხებიდან გამომდინარე ?

მოსწავლეებმა აღნიშნეს, რომ მიღებული პასუხები იზრდებოდა, არ აღემატებოდა 2-ს.

აქვე გასცეს პასუხი მეორე დავალებას და ივარაუდეს X -ის მნიშვნელობად 2-იანი.

დავსვი კონტრშეკითხვა - ეს ხომ მიახლოებითი გამოთვლებაა, რა იცით რომ იქნება 2 ?

მათ აღნიშნეს, რომ ამის გასაღები იქნებოდა შემდეგი ნაბიჯი.

რას ფიქრობთ, რას გვთხოვენ მესამე დავალებაში და რა უნდა გავაკეთოთ ?

მოსწავლეებმა აღნიშნეს - საწყისი ტოლობა უნდა გადავწეროთ განტოლების სახით X -ის ტერმინებში.

გაკვეთილზე ისმოდა კომენტარი - ეს ხომ უსასრულო პროცესია ?

მოსწავლეები მსჯელობდნენ: ორივე მხარე ავიყვანოთ კვადრატში და ამაში სწორედ უსასრულობა დაგვეხმარება

$$X^2 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$$

წინა ტოლობაში ფესვიანი გამოსახულება ისევ X იქნება და მაშასადამე გვექნება:

$$X^2 = 2 + X$$

ანუ მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას, რომლის ერთ-ერთი ფესვი იქნება 2.

მოსწავლეებმა დააკავშირეს მიღებული მათ ვარაუდთან და ადვილად დაასკვნეს, **რომ მათი ვარაუდი ალგებრულად დამტკიცდა.**

ამის შემდეგ დადგა დრო, რათა შედეგი განზოგადდეს სამისთვის. როგორც რეფლექსიაში დაწერე, ეს ნაწილი თითქმის ყველას გაუჭირდა. მინდა შევნიშნო, რა იყო ტიპური შეცდომა -**მათ 2-ის ნაცვლად დაწერეს 3**

$$X^2 = 3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots}}}}$$

აქ ჩემი მიზანი იყო, მეჩვენებინა მათთვის, სად იყო შეცდომა. მოსწავლეებმა იგივე ახლა უკვე მარტივად შეძლეს და დაწერეს:

$$X^2 = 3 + X$$

ამოხსნის შემდეგ მათ ვერ მიიღეს ამ განტოლების სწორი პასუხი. მე მივმართე მათ: **დაუკვირდით სად არის თქვენი შეცდომა?**

ერთ-ერთი მოსწავლის პასუხი იყო: X უნდა იყოს 3 და დაწერა შემდეგი გამოსახულება:

$$X^2 = ? + \sqrt{? + \sqrt{? + \sqrt{? + \sqrt{? + \dots}}}}$$

$$X^2 = ? + X$$

ჩემი შემდეგი შეკითხვა:

რა უნდა ჩავსვათ უკანასკნელში X -ის ნაცვლად ?

პასუხებმა არ დააყოვნა და გაკეთდა ჩანაწერი:

$$3^2 = ? + 3$$

$$? = 6$$

ანუ მივიღეთ: $X = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}}}$ ე. ი. 3-ანის წარმოდგენა უსასრულო ფესვებით.

ბოლო ნაბიჯი არმოჩნდა ძალიან საინტერესო - მათ თავად დასვეს კითხვები და მარტივად მივიდნენ ნებისმიერი რიცხვის უსასრულო ფესვების წარმოდგენამდე:

$$X^2 = ? + \sqrt{? + \sqrt{? + \sqrt{? + \sqrt{? + \dots}}}}$$

$$X^2 = ? + X$$

$$a^2 = ? + a$$

$$? = a^2 - a$$

$$a = \sqrt{a^2 - a + \sqrt{a^2 - a + \sqrt{a^2 - a + \sqrt{a^2 - a + \sqrt{a^2 - a + \dots}}}}}$$

გაკვეთილის დასრულების შემდეგ მოსწავლეებს ჰქონდათ იმის განცდა, რომ ამოცანის ამოხსნის ახალი მეთოდი აღმოაჩინეს. გაკვეთილი დავასრულე მოსწავლეთა თვითშეფასებით, ყველამ ერთხმად აღნიშნა, ასეთი გაკვეთილების სარგებლობა და აუცილებლობა.

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. ეროვნული სასწავლო გეგმა 2011-2016
2. Mathematics guide from 2014, MYP International Baccalaureate