ფიზიკა ამოცანებში
(გაგრძელება 1)

წინამდებარე წერილში ჩვენ ვაგრძელებთ კინემატიკური ამოცანების განხილვას. ვიდრე ახალ ამოცანებს შემოგთავაზებდეთ, შევეხებით წინა წერილის ბოლოს დასმული ამოცანის ამოხსნის ალტერნატიულ გზას. ფიზიკის თვალსაზრისით ამოცანის ამოხსნის გზა შემოთავაზებული იყო. საძიებელი საშუალო სიჩქარე გამოითვლება ფორმულით:

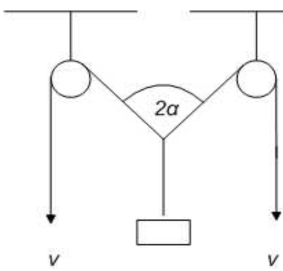
$$v = \frac{s/2 + s_2 + s_3}{\tau_1 + t_2 + t_3}$$

რადგან $s_2 + s_3 = s/2$ და $t_2 = t_3$, ე.ი. $\frac{s_2}{v_2} = \frac{s_3}{v_3}$, $\Rightarrow$ $\frac{s_2}{s/2} = \frac{v_2}{v_2 + v_3}$, მივიღებთ:

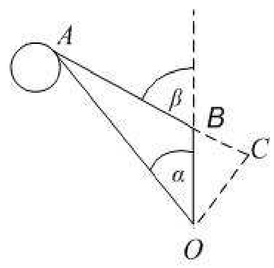
$$v = \frac{1}{\frac{1}{2v_1} + \frac{1}{v_2 + v_3}} = \frac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3}.$$

მივიღეთ, ცხადია იგივე გამოსახულება.

უძრავი ჭოჭონაქებით ტვირთის აწევა: ორი მუშა ტვირთს სწევს ზევით უძრავი ჭოჭონაქების გამოყენებით ერთნაირი v სიჩქარით. რას უდრის ტვირთის სიჩქარე u დროის იმ მომენტში, როდესაც ბაგირებს შორის კუთხე ტვირთის ჩამოკიდების წერტილში ტოლია 2α. (იხ. ნახ. 1)



ნახ. 1

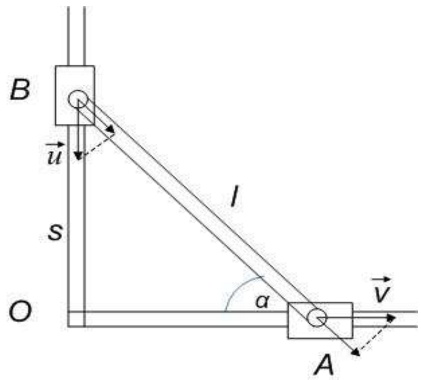


ნახ. 2

ამ ამოცანის ამოხსნისას პირველ რიგში უნდა დავაკვირდეთ რა მანძილებით განისაზღვრება თოკის და ტვირთის გადაადგილების სიჩქარეები. მუშების მიერ ტვირთის აწევის სიჩქარე განისაზღვრება ჭოჭონაქიდან ტვირთის დაკიდების წერტილამდე (განვიხილავთ ნახაზის მარცხენა მხარეს) თოკის დამოკლების სიდიდით, ხოლო ტვირთის აწევის სიჩქარე იმ სიმაღლით, რომელზეც ის იქნა აწეული (ნახ. 2). კერძოდ, თოკი რაღაც t დროის განმავლობაში მტვირთავმა ჩამოსწია BC ტოლი სიგრძით, ხოლო ტვირთი გადაადგილდა ზევით OB მანძილით. შესაბამისად სიჩქარეები v და u პროპორციულია ამ სიდიდეების: $\frac{OB}{BC} = \frac{u}{v}$. ჩვენ გვაინტერესებს მყისიერი სიჩქარე B წერტილში, ამიტომ განვიხილავთ უსასრულოდ მცირე გადაადგილებას. ამ დროს კუთხე BCO შეიძლება ჩავთვალოთ მართ კუთხედ და

მაშასადამე ტვირთის აწევის სიჩქარე წერტილში, სადაც თოკები ქმნიან 2α ტოლ კუთხეს, ტოლია: $u = \dfrac{v}{\cos\alpha}$.

ორი ერთმანეთთან ხისტად გადაბმული სხეულის მოძრაობა: l სიგრძის ღერო შეერთებულია სახსრულად ორ სხეულთან, რომლებიც სრიალებენ ურთიერთმართობული ღეროების გასწვრივ. სხეული A, რომელიც დროის საწყის მომენტში მდებარეობდა O წერტილში, მოძრაობს მუდმივი v=30მ/წმ სიჩქარით. იპოვეთ B სხეულის u სიჩქარე დროის იმ მომენტისთვის, როდესაც სხეულების შემაერთებელი ღერო ჰორიზონტალურ ღეროსთან ქმნის α=60^0 კუთხეს, აგრეთვე მანძილი $s=OB$ და B სხეულის სიჩქარე, როგორც დროის ფუნქციები.



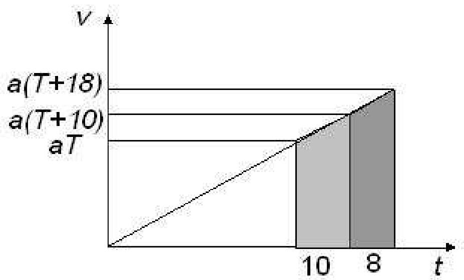
ნახ. 3

A და B სხეულები ერთმანეთთან დამაგრებულები არიან ხისტი ბმით ღეროთი, რომელიც სხეულების სრიალის დროს დეფორმაციას არ განიცდის. ეს იმას ნიშნავს, რომ ამ სხეულების სიჩქარეების გეგმილები მათ შემაერთებელ ღეროზე უნდა იყოს ერთმანეთის ტოლი (წინააღმდეგ შემთხვევაში ღერომ დეფორმაცია უნდა განიცადოს). მაშასადამე $u\sin\alpha = v\cos\alpha$, საიდანაც გამომდინარეობს $u = v\cot\alpha$=17.3მ/წმ. ვნახოთ როგორ იქნება დამოკიდებული დროზე მანძილი s. პირობის თანახმად დროის საწყის მომენტში A სხეული იმყოფებოდა O წერტილში. თუ კოორდინატთა სისტემის სათავეს მოვათავსებთ O წერტილში, მაშინ A სხეულის მოძრაობის განტოლება იქნება $x = vt$, ხოლო s მანძილისთვის პითაგორას თეორემის გამოყენებით მივიღებთ: $s = \sqrt{l^2 - v^2t^2}$. B სხეულის სიჩქარის დამოკიდებულებას დროზე მივიღებთ, თუ გავიხსენებთ, რომ სამკუთხედ AOB- ში $\cot\alpha = \dfrac{x}{s} = \dfrac{vt}{\sqrt{l^2 - v^2t^2}}$. შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა u სიჩქარის ფორმულაში, მივიღებთ: $u = \dfrac{v^2t}{\sqrt{l^2 - v^2t^2}}$.

მატარებელზე დაგვიანების დროის გამოთვლა გრაფიკულად: მგზავრმა, რომელმაც ვერ მიუსწრო მატარებლის გასვლას, შეამჩნია, რომ ბოლოს წინა ვაგონმა მას ჩაუარა t_1=10 წმ განმავლობაში, ხოლო ბოლო ვაგონმა t_2=8 წმ განმავლობაში. ჩათვალეთ, რომ

მოძრაობა არის თანაბარაჩქარებული და გამოიანგარიშეთ მატარებელზე დაგვიანების დრო T. ამოხსენით ამოცანა გრაფიკულად.

რა თქმა უნდა ამოცანის ამოხსნა შეიძლება ანალიზურადაც, მაგრამ ვცადოთ ამოვხსნათ გრაფიკულად, რომლის დროსაც დაგვჭირდება სიჩქარის გრაფიკის მნიშვნელოვანი თვისების გახსენება. როგორც ცნობილია მოძრაობის სიჩქარის გრაფიკით და საკოორდინატო ღერძებით შემოსაზღვრული გეომეტრიული ნაკვთის ფართობი რიცხობრივად მოძრაობის დროს შესრულებული გადაადგილების ტოლია.



ნახ. 4

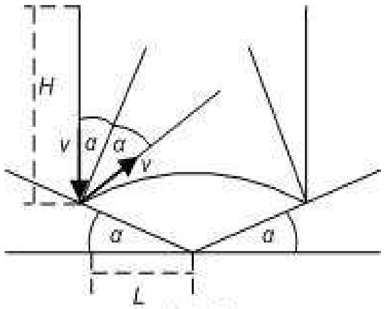
ნახ. 4–ზე მოცემულია თანაბარაჩქარებულად მოძრავი სხეულის სიჩქარის გრაფიკი. გამუქებული ნაკვთების ფართობები შეესაბამება ბოლოს წინა (ბაცი) და ბოლო (მუქი) ვაგონების მიერ შესრულებულ გადაადგილებებს. რადგან ვაგონის სიგრძე მუდმივია, ამიტომ ამ ფიგურების ფართობები ერთმანეთის ტოლი უნდა იყოს (ნახაზი არ არის შესრულებული ზუსტად მასშტაბებში). ამოცანის პირობების შესაბამისად მატარებლის მოძრაობის დრო, რომელშიც მგზავრს ბოლოს წინა ვაგონმა ჩაუარა, შეადგენს $(T+10)$ წმ, ხოლო მატარებლის სიჩქარე $a(T+10)$. ეს სიჩქარე ტოლია ბაცი ფიგურის - ტრაპეციის ერთ-ერთი ფუძის სიგრძის. მეორე ფუძის სიგრძე ტოლია aT . რაც შეეხება მეორე - მუქ ფიგურას (ასევე ტრაპეციას) მისი ფუძეებია $a(T+10)$ და $a(T+18)$. ტრაპეციების სიმაღლეები შესაბამისად ტოლია ბოლოს წინა და ბოლო ვაგონის მოძრაობის დროების, რომლებიც აითვალა მგზავრმა, ამრიგად, ვაგონის სიგრძის მუდმივობის გათვალისწინებით

$$\frac{aT+a(T+10)}{2}t_1=\frac{a(T+10)+a(T+18)}{2}t_2 .$$

მივიღეთ წრფივი განტოლება T მიმართ, რომლის ამოხსნაა T=31წმ.

სხეულის ვარდნა დახრილ სიბრტყეზე: მცირე ზომის ბურთულა H სიმაღლიდან ვარდება ჰორიზონტისადმი α კუთხით დახრილ სიბრტყეზე. მისგან ასხლეტის შემდეგ ბურთულა ეცემა მეორე სიბრტყეს, ასევე დახრილს ჰორიზონტისადმი α კუთხით. ეს სიბრტყეები ეხებიან ერთმანეთს და ჰორიზონტს წერტილში, რომელიც პირველ სიბრტყეზე ბურთულას დაცემის წერილიდან დაშორებულია L მანძილით (იხ. ნახ. 5). რა სიმაღლიდან დავარდა ბურთულა, თუ იგი მეორე სიბრტყიდან ასხლეტის შემდეგ ავიდა იგივე სიმაღლეზე? კუთხე $\alpha<\pi/4$. ჰაერის წინააღმდეგობა უგულებელყავით. ბურთულა სიბრტყეებს ეჯახება აბსოლუტურად დრეკადად.

ამოცანის პირობაში მნიშვნელოვანია ის, რომ ბურთულა ადის იგივე სიმაღლეზე და დაჯახება აბსოლუტურად დრეკადია. ეს უფლებას გვაძლევს დავასკვნათ, რომ ბურთულა პირველის სიბრტყიდან აისხლიტება იგივე მოდულის სიჩქარით, რომლითაც დაეცემა. პირველი სიბრტყიდან ასხლეტის შემდეგ სხეული მოძრაობს



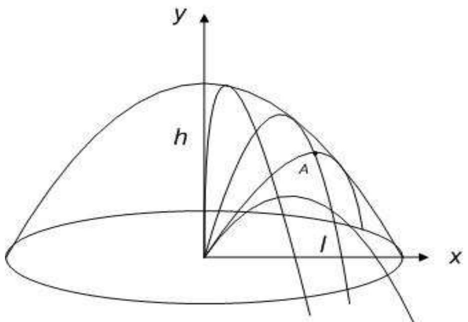
ნახ. 5

სიმძიმის ძალის გავლენით როგორც ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეული. რადგან სხეული მეორე სიბრტყიდან ასხლეტის შემდეგ ადის იგივე H სიმაღლეზე, ცხადია, რომ მეორე სიბრტყეზე დაცემის წერტილი ჰორიზონტალური სიბრტყიდან პირველ სიბრტყეზე დაცემის წერტილის დონეზეა. მაშასადამე მანძილი დაცემის ამ ორ წერტილს შორის $2L$ ტოლია. ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემის x ღერძი ჰორიზონტალურად, ხოლო y ღერძი ვერტიკალურად ზევით. მაშინ ბურთულა სიბრტყეს დაეცემა $-v$ სიჩქარით (y ღერძის საპირისპირო მომართულებით). სიბრტყიდან არეკვლის შემდეგ სხეული აისხლიტება იგივე მოდულის სიჩქარით, მაგრამ შეიძენს ჰორიზონტალურ მდგენელს, ნახაზიდან ჩანს, რომ ასხლეტის შემდეგ სიჩქარის მდგენელებია: $v_x = v\sin 2\alpha$ და $v_y = v\cos 2\alpha$. ამიტომ სხეული ჰორიზონტალური მიმართულებით L მანძილს გაივლის t დროში, რომელიც ტოლია $t = \dfrac{L}{v\sin 2\alpha}$, იგივე დროს მოანდომებს ეს სხეული დაცემის წერტილიდან მაქსიმალურ სიმაღლეზე ასვლას, მეორეს მხრივ $t = \dfrac{v\cos 2a}{g}$ (y ღერძის გასწვრივ მოძრაობა $v_y = v\cos 2\alpha$ საწყისი სიჩქარით). თუ ამ ორი განტოლებიდან გამოვრიცხავთ დროს, მივიღებთ: $L = \dfrac{v^2 \sin 4\alpha}{2g}$. რადგან სხეული ვარდება H სიმაღლიდან $v^2 = 2gH$. ამრიგად საძიებელი სიდიდისთვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას: $H = \dfrac{L}{\sin 4\alpha}$.

კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობა: საზენიტო იარაღიდან ისვრიან ყუმბარას საწყისი v_0 სიჩქარით. განსაზღვრეთ მიზანში მოხვედრის ზონა, ანუ იმ არის საზღვარი, რომლის მიღმა სამიზნე საზენიტო იარაღისთვის მიუწვდომელია. ჰაერის წინააღმდეგობას მხედველობაში ნუ მიიღებთ.

ამოცანის შინაარსი და პირობა მოითხოვს ყურადღებით ანალიზს. საქმე ის არის, რომ ერთი შეხედვით თითქოს აქ მოითხოვება განისაზღვროს ჰორიზონტალურ

სიბრტყეში არსებული წვდომის მაქსიმალური ფართის საზღვარი, რაც არასწორია და აი რატომ. პირობაში არ არის მითითებული, რომ სამიზნე აუცილებლად ჰორიზონტალურ სიბრტყეშია. იგი შეიძლება იყოს საზენიტო იარაღის თავზეც ვერტიკალურად და აგრეთვე რაღაც კუთხით ჰორიზონტის ზემოთ. ამდენად საძიებელი ნაკვთის ფართი იქნება რაღაც ორგანზომილებიანი ზედაპირის ფართი, რომლის მიღმა მყოფი სამიზნე მიუწვდომელი იქნება საზენიტო იარაღისთვის. ცხადია ამ ზედაპირის ფუძე, თუ შეიძლება ასე ითქვას, იქნება წრე, ან სხვანაირად რომ ვთქვათ საძიებელია რაღაც ზღვრული მრუდე ზედაპირი, რომლის კვეთა ჰორიზონტთან წარმოადგენს წრეწირს. განვიხილოთ ჯერ საზენიტო იარაღის თავზე მყოფი სამიზნე. ამ შემთხვევაში ყუმბარა წავა ვერტიკალურად ზევით, მიაღწევს მაქსიმალურ h სიმაღლეს. სწორედ h სიმაღლის ვერტიკალის გადაკვეთის წერტილი საძიებელ ზედაპირთან იქნება ის საზღვარი, რომლის მიღმაც სამიზნე მიუწვდომელია. ეხლა განვიხილოთ ჰორიზონტალურ ზედაპირზე მყოფი სამიზნე. ცხადია საძიებელი ზედაპირის კვეთა ჰორიზონტალურ სიბრტყესთან შეადგენს წრეწირს, რომლის რადიუსიც იქნება მაქსიმალური ფრენის სიშორე (ჩათვალეთ, რომ საზენიტო იარაღი იმყოფება ამ წრეწირის ცენტრში). ცნობილია, რომ ამ შემთხვევაში მაქსიმალური ჰორიზონტალური ფრენის სიშორე მიიღწევა სხეულის გაასროლისას ჰორიზონტისადმი 45^0 კუთხით და იგი ტოლია $l=\frac{v_0^{\,2}}{g}$. მაშასადამე სამიზნე მუღწეველი იქნება l რადიუსის მქონე წრის გარეთ. თუ სამიზნე მოთავსებულია სივრცეში განხილულ ორ ზღვრულ შემთხვევას შორის, მაშინ უნდა მოიძებნოს განტოლება, რომელიც ამ ზედაპირს აღწერს. ცხადია სამიზნე შეიძლება იყოს გასროლის ნებისმიერი მიმართულებით და საძიებელი ზედაპირი იქნება კუთხით გასროლილი სხეული მოძრაობის ყველა შესაძლო ტრეაქტორიის მომვლები ზედაპირი (იხ. ნახ. 6).



ნახ. 6

ჩვენ ვეძებთ ზედაპირს, რომელიც ჩადგმულია სამ განზომილებიან სივრცეში. ამოცანის გამარტივების მიზნით ვიპოვოთ შესაფერისი ტრაექტორია XOY სიბრტყეში. საძიებელი ზედაპირი შეიძლება მივიღოთ მიღებული ტრაექტორიის ბრუნვით ვერტიკალური ღერძის გარშემო, რომელიც გადის წრეწირის ცენტრზე. v_0 სიჩქარით კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის განტოლებებს XOY სიბრტყეში აქვთ შემდეგი სახე:

$$x=v_0\cos\alpha\cdot t \qquad y=v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2}.$$

ტრაექტორიის განტოლების მისაღებად გამოვრიცხოთ ამ განტოლებებიდან დრო. მივიღებთ:

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha)\,. \qquad (1)$$

ეს არის პარაბოლას განტოლება, რომელშიც x და x^2 კოეფიციენტები წარმოადგენენ α კუთხის ფუნქციებს. ეს ნიშნავს, რომ საწყისი სიჩქარის სხვადასხვა მიმართულებისთვის მიიღება განსხვავებული ტრაექტორიები. ამრიგად მიღებული განტოლება აღწერს ტრაექტორიების ერთობლიობას ერთი და იგივე v_0 სიჩქარისთვის, მაგრამ სიჩქარის განსხვავებული მიმართულებებისთვის. ამ განტოლებას შეიძლება მივცეთ სხვა ინტერპრეტაცია. თუ განვიხილავთ x და y როგორც სამიზნეს კოორდინატებს, მაშინ მოცემული კოორდინატებისთვის ეს განტოლება განსაზღვრავს კუთხეს, რომლითაც უნდა მოხდეს გასროლა v_0 სიჩქარით, რათა ყუმბარა სამიზნეს მოხვდეს. ამ განტოლების ამოხსნა იქნება:

$$\tan\alpha = \frac{1}{gx}(v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gx^2 + 2v_0^2 y)}\,.$$

თუ ფესვქვეშა გამოსახულება - დისკრიმინანტი - უარყოფითია, განტოლებას არ აქვს ამოხსნა. ეს ნიშნავს, რომ სამიზნე საძიებელი საზღვრის მიღმა არის. სამიზნეს კოოდინატები ეკუთვნიან საზღვარს, თუ დისკრიმინანტი ნულის ტოლია ე.ი.

$$v_0^4 - g(gx^2 + 2v_0^2 y) = 0\,,$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}\,. \qquad (2)$$

ეს არის პარაბოლას განტოლება, რომლის წვეროს კოორდინატებია $x = 0$ და $y = \frac{v_0^2}{2g}$. ამასთან x^2 კოეფიციენტი უარყოფითია და პარაბოლას ტოტები მიმართულია ქვემოთ. ისინი x ღერძს კვეთენ წერტილებში $x = \pm\frac{v_0^2}{g}$. ეს ის წერტილებია, რომლებშიც გადის საძიებელი საზღვარი და რომლებიც ჩვენ მივიღეთ ამოცანის ამოხსნის დასაწყისში. შევნიშნოთ, რომ მიღებული განტოლება არის საძიებელი ზედაპირის და XOY სიბრტყის კვეთა. თვითონ ზედაპირი მიიღება პარაბოლას ბრუნვით y ღერძის გარშემო. თუ სამიზნეს კოორდინატები არ ძევს საზღვარზე, ანუ სამიზნე იმყოფება დავუშვათ A წერტილში ზღვრული ზედაპირის შიგნით, მაშინ დისკრიმინანტი აღარ არის ნულის ტოლის, ის დადებითია და განტოლებას $\tan\alpha$ -თვის აქვს ორი ამოხსნა, ე.ი. ამ წერტილზე გადის ორი სხვადახვა ტრაექტორია.

იგივე შედეგს მივიღებთ, თუ ტრექტორიის განტოლებას (1) განვიხილავთ როგორც x ფუნქციას. წარმოვიდგინოთ, რომ სამიზნე ვერტიკალის ნებისმიერ წერტილშია ერთი რომელიმე x კოორდინატით და ნებისმიერი y კოორდინატით. მაშინ ამოცანა დაიყვანება (1) განტოლების მარჯვენა მხარის მაქსიმუმის პოვნაზე $\tan\alpha$ მიმართ. ადვილი საპოვნელია, რომ ეს მაქსიმუმი მდებარეობს $\tan\alpha = \frac{v_0^2}{gx}$ - თვის (მაქსიმუმის

მდებარეობას ვპოულობთ ან (1) განტოლების გაწარმოებით $\tan\alpha$ მიმართ, ან პარაბოლას წვეროს კოორდინატების პოვნით). თუ ჩავსვამთ ამ მნიშვნელობას (1)-ში მივიღებთ განტოლებას, რომელიც ემთხვევა (2).

ბგერითი იმპულსების გამოსხივება: წყალქვეშა ნავი რომელიც იძირება წყალში, უშვებს ბგერით იმპულსებს, რომელთა ხანგრძლივობაა t_1=30.1 წმ. ფსკერიდან ბგერის არეკვლის შემდეგ ნავის მიერ მიღებული იმპულსების ხანგრძლივობა შეადგენს t_2=29.9 წმ. გამოიანგარიშეთ ნავის ჩაძირვის სიჩქარე. ბგერის სიჩქარე წყალში v=1500 მ/წმ.

ნავის ჩაძირვის სიჩქარე აღვნიშნოთ u. პირველი გამოსხივებული იპულსის მიერ გავლილი მანძილი მეორე იმპულსამდე იქნება $s = vt_1$, მაგრამ იმავე დროში ნავი იგივე მიმართულებით გადაადგილდება $s = ut_1$ მანძილით, რაც ნიშნავს, რომ მეორე იმპულსის გამოსხივების მომენტისთვის ბგერამ გაიარა მანძილი $s = (v-u)t_1$. ეს მანძილი მუდმივია ორ მომდევნო იმპულსს შორის. ფსკერიდან ბგერის არეკვლის შემდეგ კი იგი ტოლი იქნება $s = (v+u)t_2$, რადგან ბგერა და ნავი მოძრაობენ ურთიერთ შემხვედრი მიმართულებით. განტოლების $(v-u)t_1 = (v+u)t_2$ ამოხსნით მივიღებთ $u = \frac{t_1 - t_2}{t_1 + t_2} v$=5 მ/წმ.