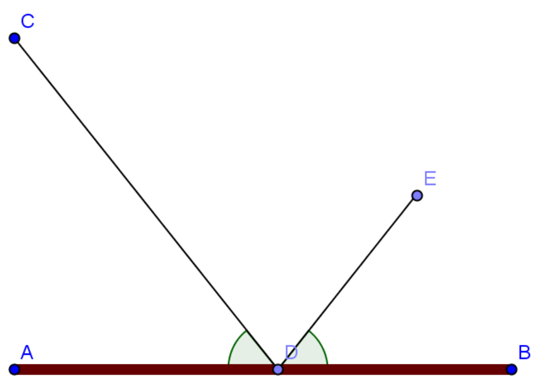
მაქსიმუმი და მინიმუმი ბუნებაში - ოპტიკა, სნელის კანონი

ჩვენი სამყარო საუკეთესოა შესაძლო სამყაროთა შორის. მისი კანონების აღწერა შესაძლებელია ექსტრემალების საშუალებით.

გოტფრიდ ვილჰელმ ლაიბნიცი

ამოცანის ისტორია

ექსტრემუმის პრინციპი, რომელიც ბუნების კანონების აღწერის ერთ-ერთი მძლავრი საშუალებაა, ზოგადად, გულისხმობს, რომ სისტემა ისე გადადის ერთი მდგომარეობიდან მეორეში, რაღაც სიდიდე იღებს უმცირეს ან უდიდეს მნიშვნელობას. ამ კანონის ყველაზე ნათელი და მკაფიო გამოვლინება გვხვდება ოპტიკაში. კერძოდ, საყოველთაოდაა ცნობილი, რომ სინათლის სხივი ისე აირეკლება ზედაპირიდან, არეკვლის კუთხე სხივის დაცემის კუთხის ტოლია: $\angle ADC = \angle BDE$ (იხ. ნახაზი).



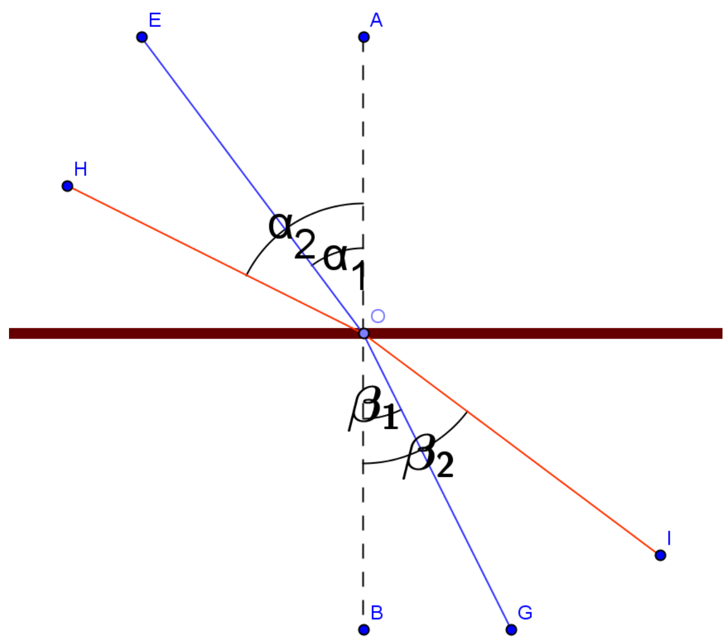
ეს გეომეტრიული ენაზე ჩამოყალიბებული ფაქტი (არეკვლის კანონი) ექსტრემუმის პრინციპის მიხედვით ნიშნავს, რომ C წერტილიდან გამოსული სინათლის სხივი, რომელიც ზედაპირის გავლით მიდის E წერტილში, გაივლის უმოკლეს მანძილს. იმის დასაბუთება, რომ CDE ტეხილის სიგრძე უმცირესია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ADC და BDE კუთხეები ტოლია, საკმაოდ ადვილია და ხშირად გვხვდება როგორც სასკოლო მათემატიკის თემატიკასთან დაკავშირებულ ამოცანათა კრებულებში, ასევე მათემატიკის სასკოლო სახელმძღვანელოებშიც.

კიდევ ერთი მოვლენა ოპტიკაში, რომლის აღწერისას გამოიყენება ექსტრემუმის პრინციპი, არის გარდატეხის კანონი. ამ კანონის შემჩნევა საკმაოდ ადვილია ყოველდღიურობაში. მაგალითად, ამ კანონის დამსახურებაა, რომ გამჭვირვალე წყალში ჩაშვებული სწორი ჯოხი წყლის ზედაპირთან გაღუნული მოჩანს.

ძველი დროის ფილოსოფოსები დიდიხანს წარუმატებლად ცდილობდნენ გარდატეხის კანონის აღწერას და დასაბუთებას, მათ შორის - ექსპერიმენტულადაც.

სინათლის გარდატეხის კანონის აღწერა პირველად ჰოლანდიელმა მეცნიერმა სნელმა (Willebrord Snellius) მოახერხა. მისი თანამედროვე დიდი მოაზროვნეებისგან - დეკარტესგან, ჰიუგენსისა და ფერმასგან განსხვავებით, სნელის სახელი ამჟამად არც ისე ცნობილია. სამეცნიერო ლიტერატურაში იგი მოიხსენიება მხოლოდ როგორც მკვლევარი, რომელმაც ექსპერიმენტულად დაადგინა სინათლის გარდატეხის კანონი. თუმცა თავის ეპოქაში სნელი საკმაოდ ცნობილი მეცნიერი იყო. მაგალითად, კეპლერი მას საუკუნის უდიდეს გეომეტრად მოიხსენიებს.

სნელის კანონი სინათლის გარდატეხის შესახებ შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს:



ვთქვათ, EOG და HOI არის სინათლის ორი სხივი, რომლებიც ეცემა გარდატეხის ზედაპირს (მაგ., წყლის ზედაპირს). სხივების EO და HO ნაწილები AB ვერტიკალთან ქმნის α_1 და α_2 კუთხეებს. ამ კუთხეებს დაცემის კუთხეები ეწოდება. სხივების ქვედა ნაწილები, OG და OI, ვერტიკალთან ქმნიან β_1 და β_2 კუთხეებს. ამ კუთხეებს გარდატეხის კუთხეები ეწოდება. სნელის კანონი ამბობს, რომ სრულდება ტოლობა

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\beta_1)} = \frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\beta_2)}.$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, როდესაც სინათლის სხივი გაივლის ორი ერთგვაროვანი გარემოს გამყოფ ზედაპირს, დაცემის კუთხის სინუსის შეფარდება გარდატეხის კუთხის სინუსთან მუდმივია - იგი დაცემის კუთხეზე არ არის დამოკიდებული.

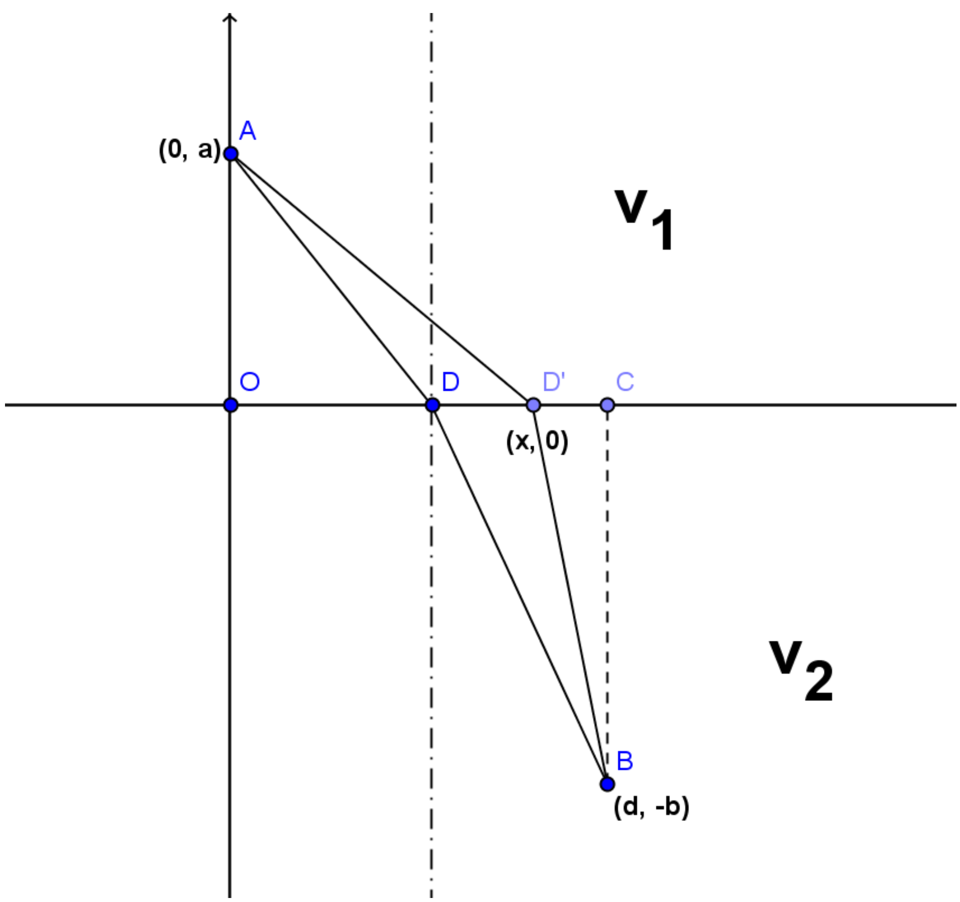
როგორც აღვნიშნეთ, სნელმა ეს კანონი ექსპერიმენტულად აღმოაჩინა. მეცნიერებაში კი ექსპერიმენტულად აღმოჩენილი ფაქტი ზოგად პრინციპზე დაფუძნებას მოითხოვს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, საჭიროა ზოგადი პრინციპის ჩამოყალიბება, რომლიდანაც მათემატიკურად მკაცრად გამომდინარეობს დაკვირვების შედეგად მიღებული ჰიპოთეზა.

სწორედ ასეთი ზოგადი პრინციპი ჩამოაყალიბა ცნობილმა ფრანგმა მეცნიერმა ფერმამ. მან საფუძვლად აიღო ექსტრემუმის პრინციპი, რომელიც იძლევა არა მხოლოდ არეკვლის და გარდატეხის კანონების დასაბუთებას, არამედ, ზოგადად, სინათლის გავრცელების კანონს ნებისმიერ გარემოში. ფერმას პრინციპის თანახმად, არაერთგვაროვან გარემოში (ე.ი. ისეთ გარემოში, რომელშიც სინათლის სიჩქარე მუდმივი არ არის) სინათლის სხივი ერთი წერტილიდან მეორეში ხვდება ისეთი ტრაექტორიით, რომლის გავლასაც იგი ანდომებს უმცირეს დროს.

ფერმას პრინციპი საშუალებას იძლევა, მათემატიკურად ზუსტად ჩამოყალიბდეს ე.წ. მინიმუმის ამოცანა, რომლის ამოხსნის შედეგი იქნება სნელის კანონი. კერძოდ, ეს პრინციპი მოითხოვს

$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2}$$

ფუნქციის მინიმუმის მოძებნას (იხ. ნახაზი)



სადაც v_1 არის სინათლის სიჩქარე გარემოს "ზედა" ნაწილში, ხოლო v_2 - სიჩქარე „ქვედა" ნაწილში. ამ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობის მოსაძებნად არსებობს ხერხი, რომელიც დღეს საშუალო სკოლის მაღალი კლასების მოსწავლეებმაც კი იციან. ეს ხერხი ფუნქციის წარმოებულის ფესვების პოვნას გულისხმობს. მართალია, ფერმამ უკვე იცოდა ეს ხერხი, - ფაქტობრივად მან ჩაუყარა საფუძველი ფუნქციის წარმოებულის ცნებას, - მაგრამ იმ დროისთვის მას შეეძლო მხოლოდ მრავალწევრით მოცემული ფუნქციის წარმოებულების პოვნა. ფუნქციის წარმოებულის გამოყენებით სნელის კანონის დასაბუთება პირველად ლაიბნიცმა მოახერხა, რომელიც მათემატიკური ანალიზის ფუძემდებლად მიიჩნევა.

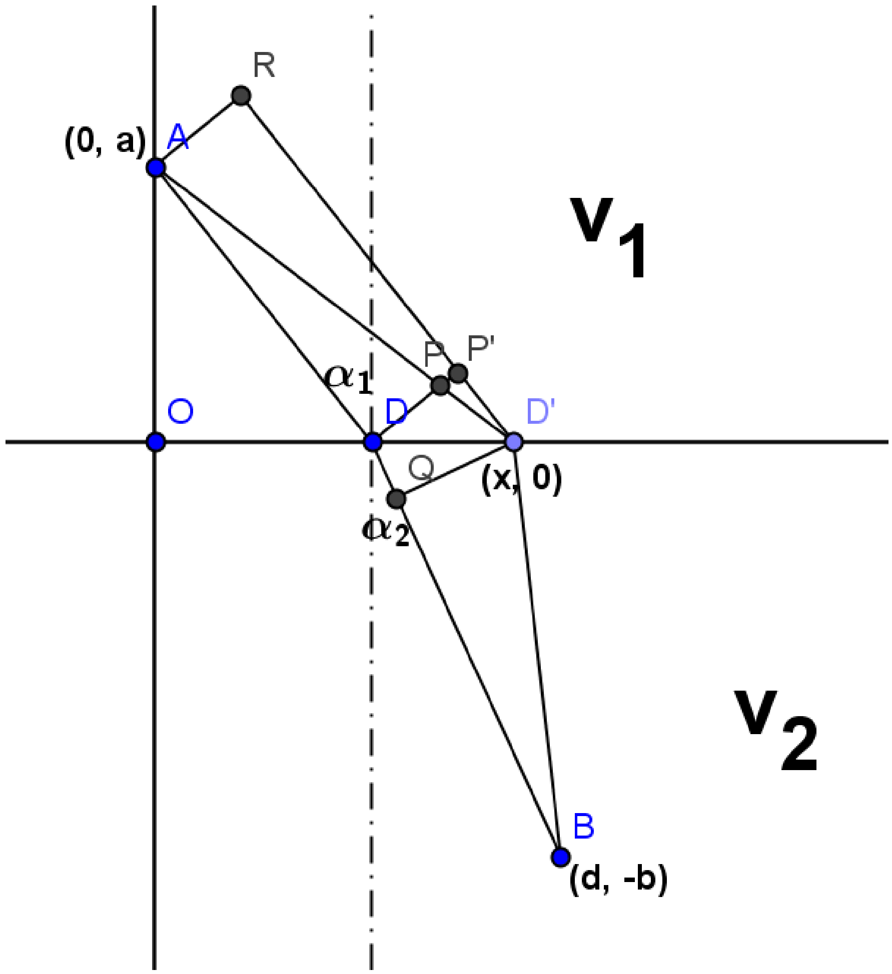
სნელის კანონის ერთ-ერთი ყველაზე მარტივი, გეომეტრიული დამტკიცების ავტორია მე-17 საუკუნის კიდევ ერთი უდიდესი მეცნიერი ჰიუგენსი. გვსურს, წარმოგიდგინოთ ეს დამტკიცება, რადგან ამ საინტერესო გეომეტრიული ამოცანის ამოხსნის გასააზრებლად საკმარისია საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსის ცოდნა და შესაბამისი კომპეტენცია.

სნელის კანონის გეომეტრიული დამტკიცება

ჰიუგენსის ამოხსნის აღწერამდე სასურველია ზუსტად ჩამოვაყალიბოთ ამოცანა.

სიბრტყეზე მდებარე l წრფის ერთ მხარეს სინათლის სიჩქარე v_1 -ის ტოლია, ხოლო წრფის მეორე მხარეს - v_2 -ის ტოლი. A და B წერტილები l წრფის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობს. საჭიროა l წრფეზე მდებარე ისეთი D წერტილის პოვნა, რომლისთვისაც ADB ტეხილის სიგრძე უმცირესია.

ამოცანის ამოხსნა



დავუშვათ, D არის ისეთი წერტილი ორი გარემოს გამყოფ წრფეზე, რომლისათვისაც სრულდება ტოლობა $\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{v_1}{v_2}$. ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ ამ წრფეზე მდებარე ნებისმიერი სხვა $D' \neq D$ წერტილისთვის $AD'B$ ტეხილზე მოძრაობის დრო აღემატება ADB ტეხილზე მოძრაობის დროს.

გავავლოთ AD -ს მართობული წრფეები A და D წერტილებში. ვთქვათ, P არის AD'-სა და D წერტილში გავლებული მართობის გადაკვეთის წერტილი. D' წერტილში გავავლოთ AD -ს პარალელური წრფე და A და D წერტილებში გავლებული AD -ს მართობული წრფეების ამ პარალელურ წრფესთან გადაკვეთის წერტილები აღვნიშნოთ P' -ითა და R -ით. ასევე გავავლოთ $D'Q$ მონაკვეთი, რომელიც DB წრფის მართობულია. ეს ყოველივე გამოსახულია ზედა ნახაზზე. ადვილი შესამჩნევია, რომ PDD' და $D'DQ$ კუთხეების სიდიდეები, შესაბამისად, ტოლია α_1 -ისა და $\frac{\pi}{2} - \alpha_2$ -ის. აქედან გამომდინარე, გვაქვს ასეთი ტოლობები:

$$|D'P'| = |D'D|\sin(\alpha_1)$$
$$|DQ| = |D'D|\sin(\alpha_2)$$

ახლა ერთმანეთს შევადაროთ ADB ტეხილის გავლის დრო და $AD'B$ ტეხილის გავლის დრო.

უკანასკნელი ორი ტოლობა და ცხადი უტოლობები

$|AP| > |AD|$, $|D'P| > |D'P'|$ და $|D'B| > |BQ|$

გვაძლევს შემდეგს

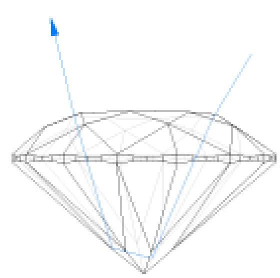
$$\frac{|AD'|}{v_1} > \frac{|AD| + |P'D'|}{v_1} = \frac{|AD|}{v_1} + |D'D|\frac{\sin(\alpha_1)}{v_1},$$
$$\frac{|D'B|}{v_2} > \frac{|BQ|}{v_2} = \frac{|DB| - |DQ|}{v_2} = \frac{|DB|}{v_2} - |DD'|\frac{\sin(\alpha_2)}{v_2}.$$

ამ ორი უტოლობის შეკრებით და იმის გათვალისწინებით, რომ $\frac{\sin(\alpha_1)}{v_1} = \frac{\sin(\alpha_2)}{v_2}$, მივიღებთ უტოლობას

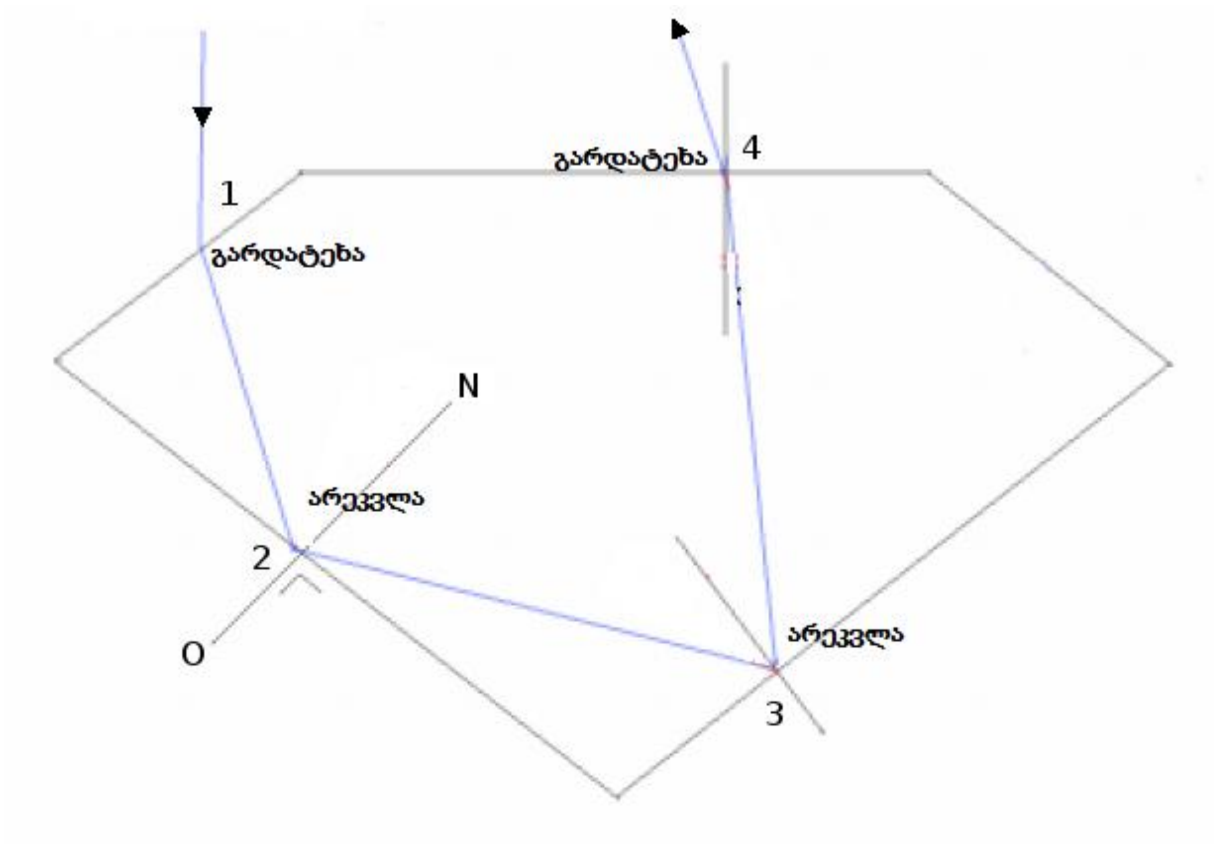
$$\frac{|AD'|}{v_1} + \frac{|D'B|}{v_2} > \frac{|AD|}{v_1} + \frac{|DB|}{v_2}.$$

ამგვარად, იმ პრინციპის გათვალისწინებით, რომ სინათლის სხივი A წერტილიდან B წერტილში მიდის ისეთი ტრაექტორიით, რომელზე მოძრაობის დრო უმცირესია, ორი გარემოს გამყოფ საზღვარზე სხივი გაივლის ისეთ წერტილში, რომლისთვისაც დაცემისა და გარდატეხის კუთხეების სინუსების შეფარდება ტოლია სინათლის სიჩქარეების შეფარდებისა.

ნახაზზე გამოსახულია სინათლის სხივის სრული არეკვლა დამუშავებულ ბრილიანტში:



იმავე მოვლენის სქემატური გამოსახულება:


1
გარდატეხა
N
არეკვლა
2
O
გარდატეხა
4
არეკვლა
3