ზაქარია გიუნაშვილი

ფიგურათა მსგავსების გამოყენება: ზომების შედარება და შეფასება

რეალურ ვითარებასთან დაკავშირებული ამოცანები

გასაკვირი არ არის, როდესაც მათემატიკური აპარატი აქტიურად გამოიყენება ისეთ სფეროებში როგორიცაა ფიზიკა, კომპიუტერული მეცნიერება, საინჟინრო საქმე და ა.შ.. ბევრისთვის შესაძლოა მოულოდნელი იყოს ის, რომ მათემატიკური მეთოდების გამოყენებით ზოგჯერ შეიძლება პასუხი გაეცეს კითხვებს, რომლებიც დაკავშირე-ბულია რეალური ვითარებებიდან მომდინარე ისეთ თემებთან, რომლებიც ე.წ. ზუსტი მეცნიერებებისაგან განსხვავებით, არ იძლევა მკაცრი ფორმულირებების საშუალებას.

ასეთი ამოცანების ერთ-ერთი სახეობაა რეალური ობიექტების ზომების შედარებისა და შეფასების ამოცანები[1]. გავრცელებული, სტანდარტული ტექსტური ამოცანე-ბისაგან განსხვავებით, რომლებთაც უხვადაა გაჯერებული სასკოლო სახელმძღვა-ნელოები, ამ ამოცანების პირობა არ არის მკაცრად ფორმულირებული. მიუხედავად ამისა, სწორედ ამ სახის ამოცანები იძლევა იმის საშუალებას, რომ მოსწავლეს ჩამოუყალიბდეს იმის განცდა, რომ მათემატიკა არის არა მხოლოდ აბსტრაქტული და რეალობას მოწყვეტილი ფორმალური პროცედურების ერთობლიობა, არამედ ის საშუალება და იარაღი, რომლითაც შესაძლებელია გარე სამყაროს შესახებ ბევრი საინტერესო ინფორმაციის მიღება.

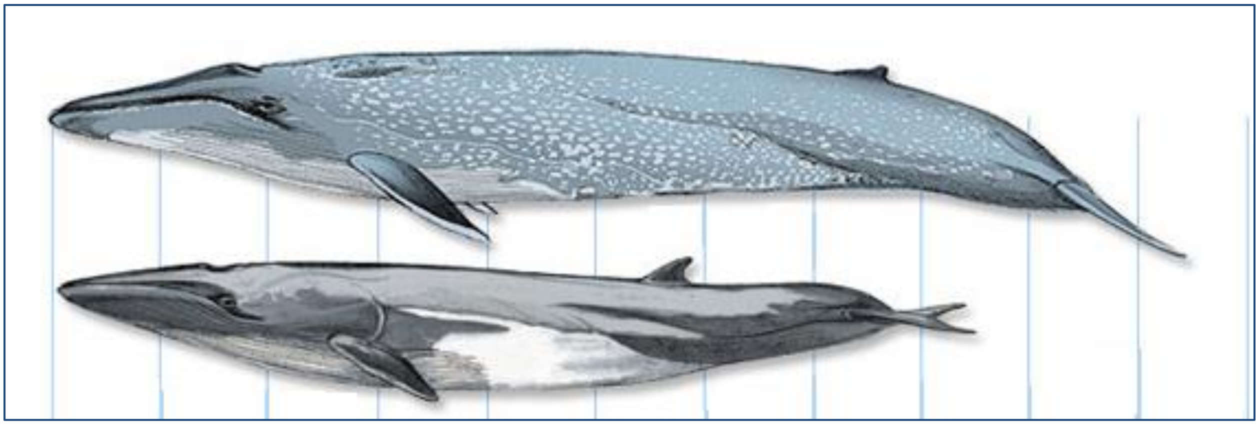
დასაწყისში შევეცადოთ დამოუკიდებლად გავცეთ პასუხი ამ სახის ამოცანების რამო-დენიმე ნიმუშში დასმულ შეკითხვას.

ამოცანა 1. ლურჯ ვეშაპს და ზოლიანს ვეშაპს თითქმის ერთნაირი სიგრძე აქვს: 30 მეტრი და 25 მეტრი, შესაბამისად. როგორ ავხსნით იმ ფაქტს რომ ზოლიანი ვეშაპის მასა ლურჯი ვეშაპის მასის დაახლოებით ნახევარია?

---

[1] *მოსწავლეს შეუძლია ფიგურების ან მათი ელემენტების ზომების მოძებნა/შეფასება და მათი გამო-ყენება პრაქტიკული პრობლემების გადაჭრისას.*
დაადგენს ფიგურის ზომებს შორის დამოკიდებულების ტიპს და იყენებს ამ დამოკიდებულებას ამო-ცანების ამოსახსნელად.
ობიექტთა ზომებისა და ობიექტთა შორის მანძილების დასადგენად (მათ შორის რეალურ ვითარებაში) იყენებს ფიგურათა მსგავსებას და დამოკიდებულებებს ფიგურის ელემენტების ზომებს შორის.

- **ეროვნული სასწავლო გეგმა - საგნობრივი პროგრამა მათემატიკაში**



ამოცანა 2. თუ შევისწავლით ერთი და იგივე სახის ფორთოხლის ფასებს შევამჩნევთ, რომ უფრო დიდი ზომის ფორთოხლის ფასი (მასის ერთი და იგივე ერთეულზე), როგორც წესი, უფრო მეტია ვიდრე უფრო მცირე ზომის ფორთოხლის ფასი. მაგ., 1 კგ „დიდი“ ფორთოხალი უფრო ძვირია, ვიდრე 1 კგ „პატარა“ ფორთოხალი, მიუხედავად იმისა, რომ ორივე ერთი და იგივე სახისაა (შევნიშნავთ, რომ ეს კანონზომიერება ვრცელდება სხვა სახეობის ხილზეც). რით აიხსნება ეს ფაქტი?

ამოცანა 3. აქლემს და ცხენს შეუძლია დაახლოებით ერთი და იგივე მასის ტვირთის გადატანა დაახლოებით ერთი და იგივე სიჩქარით. რომელ მათგანს შეუძლია უფრო დიდ მანძილზე გადაადგილება წყლის დალევის გარეშე?

ამოცანა 4. როგორია დამოკიდებულება ცხოველის ნახტომის სიმაღლესა და ამ ცხოველის ზომებს შორის?

მსგავსების გარადქმნა და მისი თვისებები ორ და სამ -განზომილებიან სამყაროში

ამ სახის შეკითხვებზე პასუხის გაცემაში დაგვეხმარება გეომეტრიის ერთ-ერთი ყველაზე მნიშვნელოვანი ცნება - ფიგურათა მსგავსება და ფიგურათა სხვადასხვა პარამეტრების შედარების ხერხები, რომლებიც ამ ცნებას ეფუძნება.

გავიხსენოთ ფიგურათა მსგავსების ფორმალური განსაზღვრება.

F ფიგურას ეწოდება F' ფიგურის მსგავსი, მსგავსების k კოეფიციენტით, თუ არსებობს F-ის ისეთი გარადქმნა F'-ში, რომლის დროსაც F-ის ნებისმიერი ორი P და Q წერტილისათვის და მათი P' და Q' ანასახებისათვის სრულდება ტოლობა $|P'Q'| = k \cdot |PQ|$.

ასევე გავიხსენოთ მსგავსების გარდაქმნის თვისებები. თუ მსგავსების გარდაქმნის კოეფიციენტი k-ს ტოლია, მაშინ სრულდება შემდეგი:

1. L სიგრძის მქონე მონაკვეთი გარდაიქმნება მონაკვეთში, რომლის სიგრძე $k \cdot L$-ის ტოლია;
2. მსგავსების გარდაქმნა ინახავს კუთხეებს;
3. თუ ფიგურის ფართობი S-ის ტოლია, მაშინ გარდაქმნით მიღებული ფიგურის ფართობი $k^2 \cdot S$-ის ტოლია.

უკანასკნელი თვისება განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია იმ სახის ამოცანების ამოხსნისას, რომლებზეც დასაწყისი გვქონდა საუბარი. ეს თვისება სხვა სიტყვებით შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს: ფიგურის ფართობი პროპორციულია ფიგურის წრფივი ზომის კვადრატის და ეს ფაქტი ასე ჩაიწერება: $S \propto L^2$. ანალოგიური თვისება გააჩნია მსგავსებას სამგანზომილებიანი (სივრცული) ფიგურებისათვის: სამგანზომილებიანი ფიგურის მოცულობა პროპორციულია მისი წრფივი ზომის კუბის ($V \propto L^3$). ე.ი. თუ ორი სივრცული ფიგურა მსგავსია, მაშინ მათი მოცულობების შეფარდება ტოლია მათი წრფივი ზომების კუბების შეფარდების. მაგალითად, ორი სფეროს მოცულობების შეფარდება ტოლია მათი რადიუსების კუბების შეფარდების, ორი მსგავსი პარალელეპიპედის მოცულობების შეფარდება ტოლია მათი შესაბამისი წიბოების სიგრძეთა კუბების შეფარდების.

მსგავსების ეს თვისებები გამოვიყენოთ დასაწყისში დასმულ შეკითხვებზე პასუხის გასაცემად.

მსგავსი ფიგურების თვისებების გამოყენება

ამოცანა 1. როგორც პირობაშია ნათქვამი, ვეშაპების სიგრძეების (ე.ი. მათი წრფივი ზომების) შეფარდება ტოლია $\frac{25}{30} = \frac{5}{6} \approx 0.8$ - ის. სამგანზომილებიანი მსგავსების თვისების თანახმად მათი მოცულობების შეფარდება იქნება დაახლოებით

$$\frac{\textit{ზოლიანი ვეშაპის მოცულობა}}{\textit{ლურჯი ვეშაპის მოცულობა}} \approx (0.8)^3 \approx 0.5$$

სწორედ ესაა იმის მიზეზი, რომ მიუხედავად წრფივი ზომების სიახლოვისა, ამ უზარმაზარი არსებების მასებს შორის ფარდობა თვალშისაცემია.

ამოცანა 2. ფორთოხლის მასა (ე.ი. მისი მოცულობა) პროპორციულია ფორთოხლის (სფეროს) რადიუსის კუბის (R^3). მისი კანის (ე.ი. უსარგებლო ნაწილის) მოცულობა პროპორციულია რადიუსის კვადრატის (R^2) (იგულისხმება, რომ კანის სისქე თითქმის არ არის დამოკიდებული ხილის ზომებზე). ამიტომ ფორთოხლის სასარგებლო ნაწილის მასის შეფარდება მისი უსარგებლო ნაწილის მასასთან პროპორციულია რადიუსის ($\frac{R^3}{R^2} = R$). აქედან გამომდინარეობს, რომ ხილის ერთი და იგივე მასაში მისი სასარგებლო მასის წილი მით უფრო მეტია რაც უფრო მეტია ხილის წრფივი ზომები (რადიუსი). სწორედ ესაა იმის მიზეზი რომ „დიდი" ზომის ფორთოხალი უფრო ძვირია, ვიდრე იმავე სახეობის „პატარა" ფორთოხალი.

ამოცანა 3. დავუშვათ ცხოველის მახასიათებელი წრფივი ზომა (მაგ., მისი სიგრძე ან სიმაღლე) არის L. წყლის რაოდენობა, რომელიც შეიძლება ამ ცხოველის ორგანიზმმა დაიტიოს დაახლოებით პროპორციულია მისი მოცულობის - L^3-ის. თუ დავუშვებთ, რომ მისი ორგანიზმიდან წყალი ძირითადად გამოიდევნება სხეულის ზედაპირიდან აორთქლების გზით, შეგვიძლია ვთქვათ რომ დროის ერთეულში აორთქლებული წყლის რაოდენობა დაახლოებით პროპორციულია მისი სხეულის ზედაპირის ფართობის, რომელიც, თავის მხრივ, პროპორციულია L^2-ის. აქედან გამომდინარე, ის დრო რომლის განმავლობაშიც ცხოველი შეძლებს წყლის მარაგის შენარჩუნებას, დაახლოებით პროპორციულია $\frac{L^3}{L^2} = L$-ის. სწორედ ამის გამო, რაც უფრო დიდია ცხოველი (აქლემი), მით უფრო მეტი დროის განმავლობაში შეუძლია მას წყლის მარაგის შევსების გარეშე გადაადგილება.

ამოცანა 4. ვთქვათ ცხოველის მახასიათებელი წრფივი სიგრძე L-ის ტოლია (მაგ., მისი სიგრძე, ან კიდურების სიგრძე). პოტენციური ენერგია E რომელსაც სხეული იძენს H სიმაღლეზე პროპორციულია ცხოველის მასის და ამ სიმაღლის ნამრავლის.

მასა თავის მხრივ პროპორციულია ცხოველის სხეულის მოცულობის. ამიტომ: $E \propto L^3 \cdot H$. ის ფიზიკური სამუშაო, რომელიც სრულდება ახტომისას პროპორციულია $F \cdot L$-ის, სადაც F არის ცხოველის კუნთების ძალა. ეს ძალა, თავის მხრივ, პროპორციულია L^2-ის, რადგან რაც უფრო მეტია კუნთის განივი კვეთის ფართობი, მით მეტია მისი ძალა. აქედან გამომდინარე, ფიზიკური სამუშაო რომელიც სრულდება პროპორციულია $L^2 \cdot L = L^3$-ის. შესრულებული სამუშაოსა და პოტენციური ენერგიის ტოლობიდან გამომდინარე გვაქვს $L^3 \cdot H \propto L^3$, საიდანაც ვღებულობთ რომ ნახტომის სიმაღლე H არ არის დამოკიდებული წრფივ ზომებზე.

მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ აქ საუბარია ნახტომის სიმაღლეზე და არა მის სიგრძეზე, რომელიც აშკარად დამოკიდებულია ცოცხალი არსების ზომებზე. დაკვირვება აჩვენებს, რომ სხვადასხვა ცოცხალი არსებები დაახლოებით ერთი და იგივე სიმაღლეზე ხტებიან. მხოლოდ, ამ შემთხვევაში საჭიროა იმის დაზუსტება, რომ ნახტომის სიმაღლე იზომება იმით, თუ ვერტიკალურად რა მანძილზე გადაად-გილდება სხეულის სიმძიმის ცენტრი. ის ფაქტი რომ ბარიერის გადალახვისას დიდი ზომების ცოცხალ არსებას უკეთესი შედეგი აქვს იმით აიხსნება რომ მისი სხეულის სიმძიმის ცენტრი უკვე ნახტომამდე უფრო მაღლაა ვიდრე უფრო მცირე ზომების ცოცხალი არსების სიმძიმის ცენტრი. ამიტომ მას ესაჭიროება უფრო ნაკლები ძალისხმევა იმისათვის რომ გადაევლოს ბარიერს.

თუ ცოცხალი არსება იმდენად მაღალია რომ მისი სიმძიმის ცენტრი ბარიერზე გაცი-ლებით მაღლაა, მაშინ მან შესაძლოა ახტომის გარეშეც გადალახოს ეს ბარიერი.