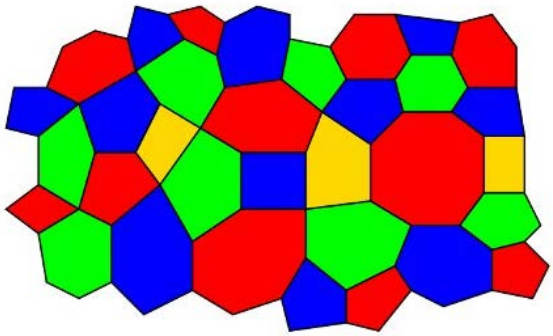
რუკის გაფერადების ამოცანა

შესავალი

რუკის გაფერადების ამოცანა ან, სხვანაირად, ოთხი ფერის ამოცანა 1852 წლიდან იღებს სათავეს. ინგლისელი მათემატიკოსი ფრენსის გატრი (Francis Guthrie) რუკაზე აფერადებდა ინგლისისადმი დაქვემდებარებულ ქვეყნებს და შეამჩნია, რომ ამისთვის საკმარისი იყო 4 ფერი. მან ასეთი ამოცანა წამოჭრა: შესაძლებელია თუ არა, ნებისმიერი რუკა გაფერადდეს მხოლოდ ოთხი ფერის გამოყენებით ისე, რომ მოსაზღვრე რეგიონები (ე.ი. რეგიონები, რომლებსაც საერთო საზღვარი აქვს) სხვადასხვა ფერისა იყოს? - და ის ცნობილ მათემატიკოსს დე მორგანს შესთავაზა. ჰიპოთეზის დასაბუთება საკმაოდ ძნელი აღმოჩნდა. მრავალი მცდელობის მიუხედავად, ეს მოხერხდა მხოლოდ 1976 წელს.

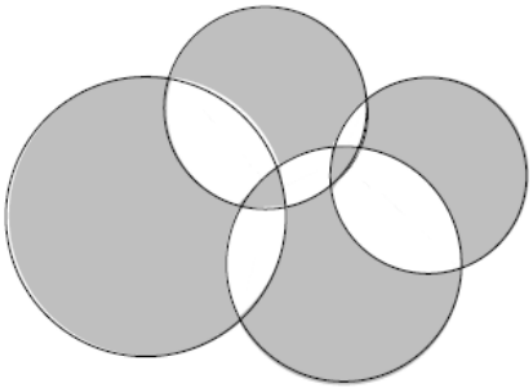
მიუხედავად იმისა, რომ ამოცანა საკმაოდ რთულია და მათემატიკურ მსჯელობასთან ერთად ალგორითმულ მიდგომასაც მოითხოვს, არსებობს მისი შედარებით მარტივი ვარიანტები. მათი დასაბუთება არ სცდება სასკოლო მათემატიკის კომპეტენციას და შეიძლება, მათემატიკური მსჯელობის უნარის განსავითარებლად გამოდგეს.



ერთ-ერთი ასეთი გამარტივებული ვარიანტია სიბრტყის დაყოფა არეებად, რომლებიც ამ სიბრტყეზე წრეების დახაზვით მიიღება.

სიბრტყის დაყოფა წრეებით

სიბრტყეზე შემოვხაზოთ რამდენიმე წრე. ამის შედეგად სიბრტყე არეებად დაიყოფა (იხ. ნახაზი).



ნახაზზე გამოსახულ შემთხვევაში დაყოფის შედეგად მიღებული არეები შეიძლება ისე გავაფერადოთ ორი ფერით, რომ მოსაზღვრე არეები სხვადასხვა ფერისა იყოს. როგორც ნახაზიდან ჩანს, ეს გაფერადება ფერების მონაცვლეობით მიიღება. ისმის კითხვა: ყოველთვის შესაძლებელია თუ არა წრეებით დაყოფილი სიბრტყის გაფერადება მხოლოდ ორი ფერით ისე, რომ მოსაზღვრე არეები სხვადასხვა ფერისა იყოს?

დიახ, შესაძლებელია. მოდი, პასუხი უფრო ზუსტად ჩამოვაყალიბოთ:

თუ სიბრტყე წრეების საშუალებით იყოფა, მაშინ შესაძლებელია, ამ დაყოფით მიღებული არეები მხოლოდ შავი და თეთრი ფერების გამოყენებით ისე გაფერადდეს, რომ ნებისმიერი ორი მოსაზღვრე არე სხვადასხვა ფერისა იყოს.

შენიშვნა: ორი არე მოსაზღვრედ ითვლება, როდესაც მათ აქვთ საერთო წირი (ამ შემთხვევაში - წრეწირის რკალი). თუ ორ არეს მხოლოდ რამდენიმე წერტილი აქვს საერთო, ისინი მოსაზღვრეებად არ ითვლება.

მათემატიკური აზროვნების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ელემენტია ჩამოყალიბებული დებულების დასაბუთება ან მისი უარყოფა მკაცრი ლოგიკური მსჯელობის საშუალებით. ამ შემთხვევაში დებულებას იმდენად ზოგადი ხასიათი აქვს, რომ მისი დასაბუთება პირდაპირი გზით თითქმის შეუძლებელია. მაგალითად, მსჯელობა შეიძლება ასე წარიმართოს: გარეთა არე გავაფერადოთ რომელიმე ფერით, მაგალითად თეთრად; ამის შემდეგ ყველა ის არე, რომელიც გარეთა არეს ესაზღვრება, გავაფერადოთ შავად; უკვე აქ ჩნდება კითხვა: იქნებ რომელიმე ორი არე, რომლებიც გარეთა არეს ესაზღვრება, ერთმანეთის მოსაზღვრეც არის? შესაძლოა, სხვადასხვა შემთხვევის განხილვამ და მათმა ანალიზმა მოგვცეს იმის დასაბუთების საშუალება, რომ ეს შეუძლებელია, მაგრამ ამის შემდეგ იმის დასაბუთებაც მოგვიწევს, რომ უკვე გაფერადებული არეების მეზობლებს შორის არ მოიძებნება ორი ისეთი არე, რომლებიც ერთმანეთის მოსაზღვრეა. ეს მსჯელობა შეიძლება უსასრულოდ გაგრძელდეს. მათემატიკური აზროვნების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ასპექტი ის არის, რომ მოვძებნოთ დასაბუთების ისეთი

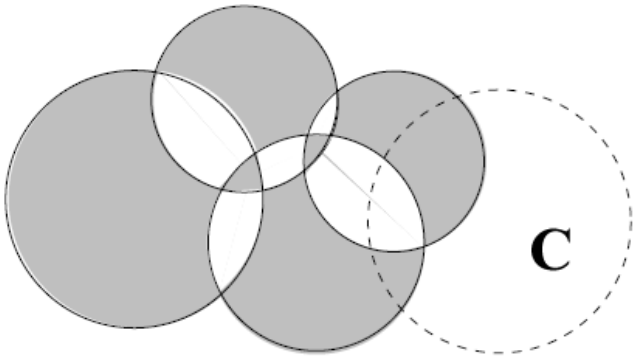
ხერხი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს, თავი დავაღწიოთ ცალკეულ შემთხვევათა დეტალურ ანალიზს და სასურველი შედეგი სწრაფად მივიღოთ. სწორედ ერთ-ერთი ასეთი ხერხია მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი. რომელიც ამ შემთხვევაში შეგვიძლია გამოვიყენოთ.

მათემატიკური ინდუქცია გამოიყენება მაშინ, როდესაც გამონათქვამი მოიცავს ნატურალურ პარამეტრ n -ს, რომელიც რაიმე სახის ობიექტთა ცვლადი რაოდენობაა. ამ შემთხვევაში n არის სიბრტყეზე დახაზული წრეების რაოდენობა. ინდუქციის პრინციპის თანახმად, თუ n -ზე დამოკიდებული გამონათქვამი ჭეშმარიტია $n=1$ შემთხვევაში და მისი ჭეშმარიტობიდან $n-1$ შემთხვევაში გამომდინარეობს მისი ჭეშმარიტობა n -სათვის, მაშინ ეს გამონათქვამი ჭეშმარიტია ნებისმიერი ნატურალური რიცხვისთვის.

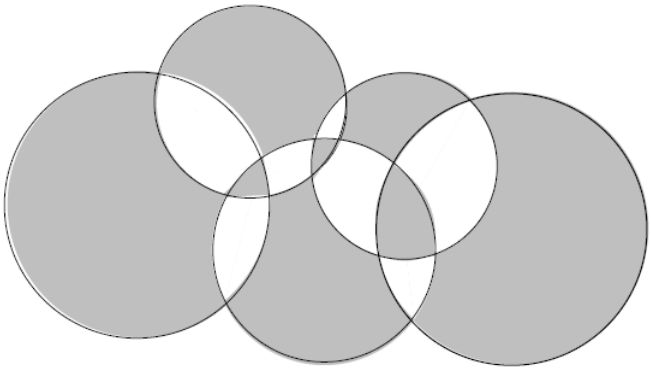
ჩვენს შემთხვევაში, როდესაც $n=1$ სიბრტყე დაყოფილია ორ არედ (იხ. ნახაზი),

რომელთაგან ერთია წრის შიდა არე, ხოლო მეორე - სიბრტყის დარჩენილი ნაწილი, ადვილი მისახვედრია, რომ ამ ორის არის გაფერადება ყოველთვის შეიძლება ორი განსხვავებული ფერით. ასე რომ, გამონათქვამის ჭეშმარიტობა $n=1$ შემთხვევისთვის ცხადია.

ამის შემდეგ დავუშვათ, რომ $n>1$ და რომ დასამტკიცებელი გამონათქვამი ჭეშმარიტია $n-1$ წრის შემთხვევაში (ამგვარ დაშვებას ეწოდება ინდუქციის ჰიპოთეზა). სიბრტყეზე დახაზულ n წრეს შორის შევარჩიოთ რომელიმე, მაგალითად, C და დროებით ჩავთვალოთ, რომ იგი არ არის დახაზული:



დარჩენილი $n-1$ წრის მიერ წარმოქმნილი არეები, ინდუქციის ჰიპოთეზის თანახმად, ყოველთვის შეიძლება გაფერადდეს ისე, რომ მოსაზღვრე არეები სხვადასხვა ფერისა იყოს. ამის შემდეგ "უკან დავაბრუნოთ" C წრე, რომელიც დროებით "წავშალეთ". ამ წრის გარეთ გაფერადება დავტოვოთ უცვლელად, ხოლო მის შიგნით თეთრ და შავ ფერებს ადგილები გავუცვალოთ: ის არე, რომელიც თეთრად იყო გაფერადებული, გავაფერადოთ შავად, ხოლო შავად გაფერადებული არე - თეთრად, ისე, როგორც ნახაზზე ნაჩვენები:



ამგვარად მიღებული გაფერადება აკმაყოფილებს პირობას, რომელიც მოითხოვება. ამის დასაბუთება არც ისე ძნელია. თუ განვიხილავთ ნებისმიერ რკალს, რომელიც C წრის გარეთაა, მაშინ ამ რკალის ორივე მხარეს განსხვავებული ფერის არეები იქნება, რადგან, როგორც აღვნიშნეთ, C წრის გარეთ არაფერი შეგვიცვლია; იმ შემთხვევაშიც, როდესაც რკალი არის C წრის შიგნით, მის ორივე მხარეს კვლავ განსხვავებული ფერის არეები იქნება, რადგან წრის შიგნით არეებს ფერები შევუცვალეთ. დარჩა ერთადერთი შემთხვევა - როდესაც რკალი თვით C წრეწირზე მდებარეობს. ასეთი რკალის ორივე მხარე ერთნაირი ფერისა იქნებოდა C წრის უკან დაბრუნებამდე, მაგრამ მას შემდეგ, რაც C წრე დავაბრუნეთ და მის შიგნით მოქცეულ ყველა არეს ფერი შევუცვალეთ, C წრის რკალის ნებისმიერი ორი მოსაზღვრე რეგიონი სხვადასხვა ფერისა იქნება.

ამრიგად, ჩვენ დავასაბუთეთ, რომ $n-1$ წრით მიღებული სიბრტყის დაყოფის გაფერადების შესაძლებლობიდან გამომდინარეობს n წრის დახაზვით მიღებული დაყოფის გაფერადების შესაძლებლობა, ეს კი, მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის თანახმად, ნიშნავს იმას, რომ ნებისმიერი რაოდენობის წრით მიღებული დაყოფა შეიძლება გაფერადდეს ორი ფერით ისე, რომ ყოველი ორი მოსაზღვრე არე სხვადასხვა ფერისა აღმოჩნდეს.