ზაქარია გიუნაშვილი

სტერეომეტრია სკოლაში: ფიგურების თვისებრივი მახასიათებლების კვლევა

გეომეტრია: გაზომვების ხელოვნება და სივრცის აღქმა

ცნობილია, რომ გეომეტრიის წარმოშობა ისტორიულად გაზომვებთან არის დაკავშირებული, მაგრამ, როგორც მეცნიერების ყველა სხვა სფერო, დროთა განმავლობაში ისიც გასცდა პრაქტიკული გამოყენების ფარგლებს და გადაიქცა საქმიანობად, რომელშიც მნიშვნელოვანია კვლევა-ძიება და ადამიანის კოგნიტიური უნარების განვითარება. ამიტომ შეიძლება ითქვას, რომ გეომეტრიის სასკოლო კურსის ძირითადი მიზანია არა მხოლოდ პრაქტიკულ გაანგარიშებათა ხერხების ათვისება (რაც თავისთავად ძალზე მნიშვნელოვანია), არამედ სივრცის სტრუქტურის შესწავლა და მისი აღქმის, წარმოსახვის უნარების განვითარება.

ამ თვალსაზრისით განსაკუთრებული როლი აკისრია სტერეომეტრიას ("სივრცულ გეომეტრიას").

ყველა მასწავლებელმა იცის, რომ სტერეომეტრიული ამოცანის ამოხსნის სხვადასხვა საფეხურზე საჭიროა:

. გეომეტრიული ობიექტის წარმოსახვა და რომელიმე ფორმით გამოსახვა, რაც, თავის მხრივ, ხელს უწყობს წარმოსახვისა და სივრცის აღქმის უნარის განვითარებას;

. ობიექტის ინტერპრეტაცია და მისი დაშლა სიბრტყულ ან სხვა დაბალგანზომილებიან ელემენტებად;

. მიღებული მასალის ანალიზი და ამოცანის ფორმულირება ალგებრულ ენაზე.

. ამოხსნა და შედეგების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.

გეომეტრიის სასკოლო კურსი, ტრადიციისამებრ, გაზომვებზე, ე.ი. გეომეტრიული ობიექტების მეტრული თვისებების დადგენაზეა ორიენტირებული. იგი უმთავრესად მოიცავს სიგრძეების, ფართობებისა და კუთხეების სიდიდეთა გამოთვლის ხერხების შესწავლას, თუმცა მათემატიკის საგნობრივ პროგრამაში დასაწყისიდანვე მნიშვნელოვანი ყურადღება ექცევა გეომეტრიული ობიექტების თვისებრივი მახასიათებლების შესწავლას (***მათ. I.6.*** *მოსწავლეს შეუძლია ბრტყელი გეომეტრიული ფიგურის ამოცნობა და აღწერა;* ***მათ. I.7.*** *მოსწავლეს შეუძლია ბრტყელი გეომეტრიული ფიგურების გამოსახვა და ობიექტთა ურთიერთმდებარეობის ამოცნობა;* ***მათ. II.8.*** *მოსწავლეს შეუძლია თვისებრივი და რაოდენობრივი ნიშნების გამოყენება ფიგურების აღსაწერად*).

ამჯერად გვსურს, ყურადღება მივაქციოთ სტერეომეტრიის სწორედ ამ ასპექტს - გეომეტრიული ობიექტების ისეთი მახასიათებლების შესწავლას, რომლებიც არ არის დაკავშირებული მის მეტრულ თვისებებთან. ერთ-ერთი მათგანია მრავალწახნაგა ფიგურის ეილერის მახასიათებელი. სასკოლო მათემატიკის საგნობრივ პროგრამაში ეს საკითხი ერთ-ერთ ინდიკატორში ფიგურირებს (***მათ. VI.9. მოსწავლეს შეუძლია ფიგურებსა და ფიგურის ელემენტებს შორის მიმართებების დადგენა.*** *შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე: სხვადასხვა ფიგურისთვის (ბრტყელი, სივრცული) ითვლის და ერთმანეთს ადარებს ეილერის მახასიათებლის მნიშვნელობებს; იყენებს ეილერის ფორმულას სივრცული ფიგურების ელემენტების რაოდენობის დასადგენად*). მისი ძირითადი

დანიშნულება სწორედ ის არის, რომ გეომეტრიის სწავლებისას მეტრულ მახასიათებლებთან ერთად ფიგურების სხვა თვისებების შესწავლასაც მიექცეს ყურადღება.

გარდა ამისა, ეს თემა გვხვდება შემდგომაც, კერძოდ, როდესაც საუბარია ისეთი მნიშვნელოვანი მათემატიკური კომპეტენციის შესახებ, როგორიცაა დამტკიცება-დასაბუთების ხერხები და მათი გამოყენება: ***მათ. XI.9. მოსწავლეს შეუძლია დედუქციურ/ინდუქციური მსჯელობისა და ალგებრული ტექნიკის გამოყენება გეომეტრიულ დებულებათა დასამტკიცებლად.*** *შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე: პოულობს ლოგიკურ კავშირებს (მაგალითად, გამომდინარეობა) მოცემულ გეომეტრიულ დებულებებს შორის; იყენებს დედუქციურ და ინდუქციურ მსჯელობას; განაზოგადებს ცალკეულ გეომეტრიულ დებულებებს; აყალიბებს ჰიპოთეზას და ასაბუთებს/უარყოფს მას (მათ შორის - მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით; მაგალითად, ეილერის ფორმულა სიბრტყეზე და სივრცეში).*

ამგვარად, შეიძლება ითქვას, რომ ეს თემა შეიძლება გამოვიყენოთ როგორც მსჯელობა-დასაბუთების უნარის განმავითარებელი ეფექტური სავარჯიშო.

რა არის ამოზნექილი ფიგურა?

სხვადასხვა ვითარებაში ხშირად ვიყენებთ ისეთ ცნებებსა და ტერმინებს, რომლებიც, ერთი შეხედვით, ინტუიციურად გასაგები და თვალსაჩინოა. ამგვარი ტერმინების გამოყენებისას მათი მკაცრად განსაზღვრის საკითხი არც კი დაისმის. მიუხედავად ამისა, ზუსტი განსაზღვრებებისა და ფორმულირებების გამოყენება მათემატიკის სწავლების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ასპექტია. ეს განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ისეთ შემთხვევებში, როდესაც საქმე გვაქვს ერთი შეხედვით ცხად და თვალსაჩინო ცნებასთან, ტერმინთან ან დებულებასთან. ამის მაგალითია ფიგურის ამოზნექილობის ცნება. როგორც პრაქტიკა გვაჩვენებს, საბაზო საფეხურის ბოლო ეტაპზე მაინც ნებისმიერი მოსწავლე შეძლებს ამოზნექილი ფიგურებისა და ისეთი ფიგურების ამოცნობას, რომლებიც ამოზნექილი არ არის. ასევე, რამდენიმე ნიმუშის ჩვენების შემდეგ ყველა მათგანს შეუძლია გამოიცნოს, არის თუ არა ნაჩვენები გეომეტრიული ფიგურა ამოზნექილი მრავალკუთხედი. მიუხედავად ამისა, ამოზნექილი მრავალკუთხედის განმარტებისას ერთგვარ სირთულეს ვაწყდებით. ამ ცნების გააზრებასთან დაკავშირებული აქტივობა მოიცავს შემდეგ საფეხურებს:

1. მოსწავლეები ნიმუშებზე განასხვავებენ ამოზნექილ და არაამოზნექილ ფიგურებს. შეიძლება დაწყება ბრტყელი ფიგურებით.

2. ყალიბდება მკაცრი მათემატიკური განსაზღვრება, რომელიც შეიძლება იყოს ზოგადი: S ფიგურას ეწოდება ამოზნექილი, თუ იგი მოიცავს მისი ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელ მონაკვეთს.

3. ამოზნექილი მრავალწახნაგას შემთხვევაში ისმება შეკითხვების სერია:

ა. რისგან შედგება მრავალწახნაგა?

პასუხი: მრავალწახნაგა არის მრავალკუთხედების გაერთიანება.

ბ. როგორია ეს გაერთიანება? მრავალკუთხედების ნებისმიერი გაერთიანება გვაძლევს მრავალწახნაგას?

პასუხი: მრავალკუთხედების ამ ერთობლიობის ნებისმიერი ორი მრავალკუთხედის თანაკვეთა ან ცარიელი სიმრავლეა, ან ერთი საერთო წვერო, ან ერთი საერთო გვერდი.

აქ შეიძლება დაისვას თანმხლები შეკითხვები:

შეიძლება თუ არა, ორ მრავალკუთხედს ჰქონდეს მხოლოდ ორი საერთო წვერო?

რა ხდება როდესაც ორ მრავალკუთხედს აქვს ორი ან მეტი საერთო გვერდი?

გ. კიდევ რა არის საჭირო იმისათვის, რომ მრავალკუთხედების ასეთმა გაერთიანებამ მოგვცეს მრავალწახნაგა?

პასუხი: მრავალკუთხედების ამ გაერთიანებამ სივრცე უნდა გაყოს ორ ბმულ არედ.

დ. რას ნიშნავს მრავალკუთხედის ამოზნექილობა?

პასუხი: ამ ორი ბმული არიდან ერთ-ერთი არის ამოზნექილი სიმრავლე.

4. შეჯამება: ამოზნექილი მრავალწახნაგა ეწოდება მრავალკუთხედების ისეთი ერთობლიობის P გაერთიანებას, რომლის ნებისმიერ ორ მრავალკუთხედს შეიძლება საერთო ჰქონდეს მხოლოდ ერთი წვერო ან ერთი გვერდი; ამასთანავე, ამ გაერთიანებამ სივრცე უნდა გაყოს ორ ქვესიმრავლედ: $S_1 -$ ად და $S_2 -$ ად , რომელთაგან ერთი ამოზნექილია (მაგ., S_1), ხოლო როდესაც გვაქვს ორი წერტილი, $A \in S_1, B \in S_2$, მაშინ მათი შემაერთებელი მონაკვეთი AB აუცილებლად გადაკვეთს P-ს. როგორც წესი, მრავალწახნაგას უწოდებენ არა მხოლოდ P-ს, არამედ $P \cup S_1$-საც.

5. რა თვისებები აქვს ამოზნექილ ფიგურას?

განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ამოზნექილი ფიგურის ასეთი თვისება: თუ A არის P ამოზნექილი ფიგურის შიდა წერტილი, ხოლო B - გარე წერტილი, მაშინ AB მონაკვეთი ამ მრავალწახნაგას გადაკვეთს ერთ და მხოლოდ ერთ წერტილში. ამის დასაბუთება შეიძლება განხორციელდეს ბრტყელი ფიგურის შემთხვევაში.

როგორც ვხედავთ, ამოზნექილი მრავალწახნაგას განსაზღვრების დაზუსტება მოიცავს რამდენიმე საფეხურს, რომელთა დროსაც ხდება ბუნებრივი და ცხადი წარმოდგენების ვერბალიზაცია-დასაბუთება, ლოგიკურად გამართული ფორმით ჩამოყალიბება, რაც მათემატიკის სწავლების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ასპექტია.

ეილერის თეორემა

მოცემული ამოზნექილი მრავალწახნაგასთვის, დავუშვათ, V არის მისი წვეროების რაოდენობა, N - მისი წიბოების რაოდენობა, ხოლო F - მისი წახნაგების რაოდენობა. ამ მონაცემებისთვის სრულდება ასეთი ტოლობა:

$$V - N + F = 2.$$

ამ რიცხვს ეწოდება მრავალწახნაგას ეილერის მახასიათებელი.

ამ დებულების დასაბუთება შეიძლება რამდენიმე საფეხურად:

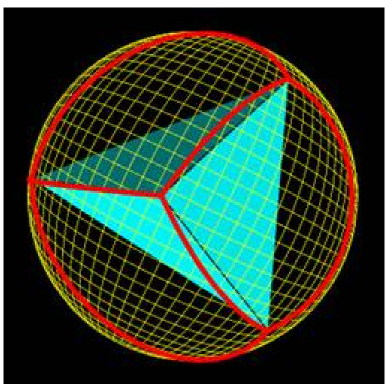
I. რამდენიმე კერძო შემთხვევის განხილვა და ცხრილის შევსება

მრავალწახნაგა	წვეროები	წიბოები	წახნაგები	ეილერის მახ.
ტეტრაედრი	**4**	**6**	**4**	**2**
ოქტაედრი	**6**	**12**	**8**	**2**
პარალელეპიპედი	**8**	**12**	**6**	**2**
n**კუთხა პირამიდა**	$n+1$	$2n$	$n+2$	**2**
n**კუთხა პრიზმა**	$2n$	$3n$	$n+2$	**2**

II. მრავალწახნაგას დაგეგმილება სფეროზე

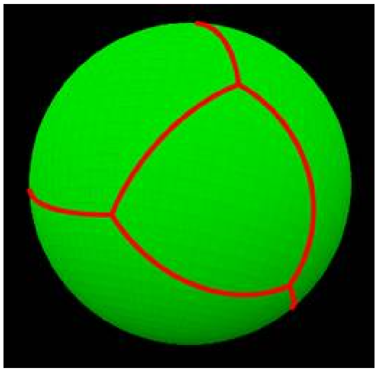
ეს საფეხური მნიშვნელოვანია, რადგან ამ დროს ხდება ამოზნექილი მრავალწახნაგას შესაბამისი სფერული გრაფის აგება.

ვიღებთ O წერტილს მრავალწახნაგას შიგნით. ვიღებთ S სფეროს, რომელიც მოიცავს ამ მრავალწახნაგას.O წერტილიდან ვავლებთ სხივებს მრავალწახნაგას წვეროებისკენ. ვპოულობთ ამ სხივების გადაკვეთას სფეროსთან და გადაკვეთის წერტილებს ერთმანეთთან ვაერთებთ სფეროს დიდი წრეწირებით მაშინ, როდესაც მრავალწახნაგას შესაბამისი წერტილები შეერთებულია.



შედეგად მიიღება გრაფი სფეროზე, რომელიც თავის თავს არ გადაკვეთს (რატომ არ გადაკვეთს?).

გვაქვს გრაფი სფეროზე, რომელიც თავის თავს არ გადაკვეთს. ვაჩვენოთ, რომ ამ გრაფის ეილერის მახასიათებელი 2-ის ტოლია.

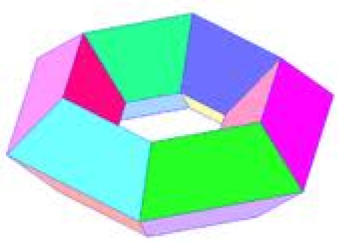


საწყის ეტაპზე შეიძლება განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითები. მაგ., ერთი წერტილი სფეროზე; წერტილი და მარყუჟი ამ წერტილში; ორი წერტილი სფეროზე და მათი შემაერთებელი წირი.

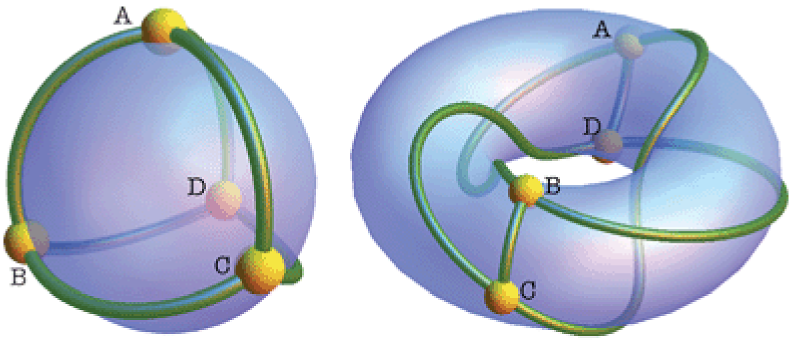
ზოგადი დამტკიცებისას გამოიყენება ინდუქცია. სფეროზე გრაფს მოვაშოროთ ერთი წიბო. რა ხდება ამ დროს? თუ წიბო შეკრული რკალია, მაშინ წიბოების რაოდენობა მცირდება ერთით; არეების რაოდენობაც მცირდება ერთით, ამიტომ მახასიათებელი არ იცვლება და ა.შ. საბოლოოდ დაიყვანება ერთი წერტილის შემთხვევაზე

შენიშვნა: აქ საფუძველი ეყრება მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გააზრებასაც.

შედარებისთვის შეიძლება განვიხილოთ სხვა ფიგურების შემთხვევებიც, მაგალითად, ტორისა.



მათი განხილვა საშუალებას იძლევა, ჩატარდეს კვლევა, რომლის ძირითადი მიზანი იქნება ეილერის მახასიათებლების შედარება სხვადასხვა ფიგურისთვის და იმის დადგენა, რაზეა დამოკიდებული ეილერის მახასიათებლის ესა თუ ის მნიშვნელობა.



(a) (b)