ზაქარია გიუნაშვილი

გეომეტრია სფეროზე

შესავალი: ზოგადი ცნებები და ზოგიერთი თვისება

ჩვენთვის კარგად ნაცნობი სიბრტყის გეომეტრია დაკავშირებულია წერტილებთან, წრფეებთან და აღწერს მათ ურთიერთმიმართებას, ადრეული (ბაბილონელების, არაბების, ბერძნების) გეომეტრიათა უმეტესობა კი სფერული იყო. ეს გეომეტრიები დედამიწაზე მიმდინარე გაზომვებს უკავშირდებოდა.

ისევე როგორც ნებისმიერი სხვა გეომეტრიისა, სფერული გეომეტრიის შესწავლაც უნდა დავიწყოთ მისი ძირითადი ელემენტების (წერტილი, წრფე და ა.შ.) განსაზღვრით. ამ შემთხვევაში უნდა მივაღწიოთ შეთანხმებას იმის შესახებ, რას ვუწოდოთ წრფე და წრფის სეგმენტი სფეროზე.

ევკლიდეს განმარტებით, პარალელური წრფეები არის *ერთ სიბრტყეში მდებარე წრფეები, რომლებიც დამოუკიდებლად ვრცელდება ორივე მიმართულებით და არც ერთი მიმართულებით არასოდეს ხვდება ერთმანეთს*. ადვილი შესამჩნევია, რომ სფეროს გეომეტრია განსხვავდება სიბრტყის გეომეტრიისგან, რომელსაც აქამდე ვსწავლობდით. ჩვენი წარმოდგენით, წრფე არის *სწორი ხაზი, რომელიც შემოუსაზღვრელია*, სფეროზე დახაზული ნებისმიერი წირი კი გამრუდებულია და ვერც შემოუსაზღვრელი იქნება. თვით სფეროს ზედაპირიც გამრუდებულია და შემოსაზღვრული. სიბრტყეზე წრფის გასწვრივ მოძრაობის დროს უნდა ვიმოძრაოთ "სწორად და პირდაპირ" ისე, რომ არც ერთი მიმართულებით არ "გადავუხვიოთ". სფეროზე ანალოგიური მოძრაობისას მოძრაობის ტრაექტორია გაჰყვება წირს, რომელსაც ეწოდება *დიდი წრეწირი*.

განსაზღვრება: *სფეროს დიდი წრეწირი ეწოდება იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც არის ამ სფეროსა და მის ცენტრზე გამავალი სიბრტყის თანაკვეთა.*

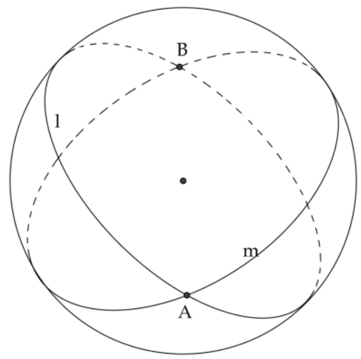
ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ დიდი წრეწირი სფეროს ყოფს ორ ტოლ ნაწილად, რომლებსაც *ნახევარსფეროები* ეწოდება. ცნობილია, რომ დედამიწაზე ერთ-ერთი დიდ წრეწირი *ეკვატორია*. იგი დედამიწას სამხრეთ და ჩრდილოეთ *ნახევარსფეროებად* ყოფს. სხვა ცნობილ დიდ წრეწირებს დედამიწაზე *მერიდიანები* ეწოდება. ამ წრეწირებს აქვს ორი საერთო წერტილი - ჩრდილოეთი და სამხრეთი *პოლუსები*. ეს ის წერტილებია, რომლებშიც დედამიწის ბრუნვის ღერძი კვეთს დედამიწის ზედაპირს. პოლუსები წარმოადგენს *ანტიპოდური* (დიამეტრულად საპირისპირო) წერტილების მაგალითს.

განსაზღვრება: *სფეროს ცენტრზე გამავალი წრფისა და ამ სფეროს გადაკვეთის წერტილებს ანტიპოდური წერტილები ეწოდება.*

როგორც ვთქვით, გეომეტრიის აღწერის დასაწყისში შემოგვაქვს ისეთი ცნებები, როგორიცაა "წერტილი", "წრფე", "სიბრტყე", თუმცა არ ვიძლევით მათ ზუსტ განსაზღვრებას. მიუხედავად ამისა, ამ ცნებების გამოყენებით ვაყალიბებთ პოსტულატებს, რომლებიც საკმაოდ მკაცრადაა ფორმულირებული. ეს პოსტულატები, თავის მხრივ, აზუსტებს საწყისი ცნებების შინაარს. ისმება კითხვა: იქნება თუ არა გეომეტრიის პოსტულატები კვლავ აზრიანი, თუ

ზემოაღნიშნული საწყისი ცნებების შესახებ წარმოდგენას შევცვლით? კერძოდ, რა მოხდება, თუ სფერული გეომეტრიის შემთხვევაში წრფეებად ჩავთვლით დიდ წრეწირებს ამ სფეროზე?

როგორც ნახაზიდან ჩანს, სფერული გეომეტრიის შემთხვევაში უკვე მცდარია ის დებულება, რომ ორ წერტილზე გადის ერთი და მხოლოდ ერთი წრფე.



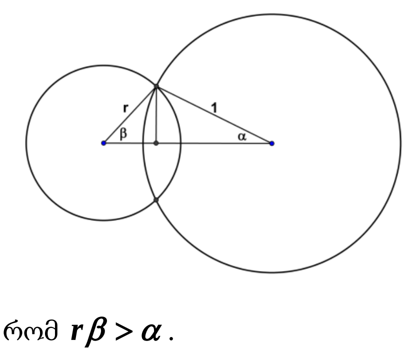
კერძოდ, ეს დებულება არ სრულდება იმ შემთხვევაში, როდესაც ეს ორი წერტილი ანტიპოდური წერტილებია.

ასევე ადვილი შესამჩნევია, რომ სფერული გეომეტრიის შემთხვევაში აზრს კარგავს პარალე- ლურობის ცნება კლასიკური მნიშვნელობით, რადგან ნებისმიერი ორი წრფე სფეროზე აუცილებლად თანაიკვეთება, თანაც - ორ წერტილში.

მეტრული თვისებები

როგორც ვიცით, სიბრტყეზე ევკლიდური გეომეტრიის შემთხვევაში ორ წერტილს შორის უმოკლესი მანძილია ამ წერტილებზე გამავალი წრფის მონაკვეთი, რომლის ბოლოებიც ეს წერტილებია. საინტერესოა, სამართლიანია თუ არა ეს დებულება სფეროსთვის. თუ ასეა, მაშინ გვექნება დამატებითი არგუმენტი, სფერულ გეომეტრიაში წრფეებად დიდი წრეწირები მივიჩნიოთ.

ამოცანა დაიყვანება იმის დასაბუთებაზე, რომ სიბრტყის ორ წერტილზე გამავალი ორი წრეწირის მცირე რკალებს შორის უმცირესი სიგრძე აქვს იმ რკალს, რომელიც უფრო დიდი რადიუსის მქონე წრეწირს ეკუთვნის.



ამ შემთხვევაში უნდა ვაჩვენოთ, რომ $r\beta > \alpha$.

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$r\sin(\beta)=\sin(\alpha)\Rightarrow r=\frac{sin(\alpha)}{sin(\beta)}.$$

ე.ი. საჩვენებელია უტოლობა

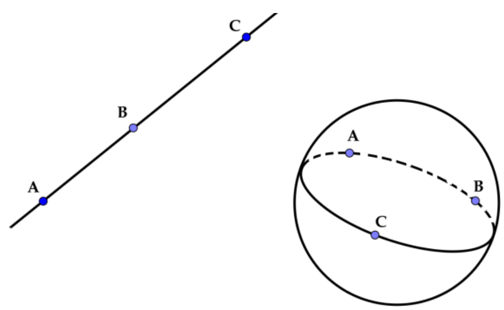
$$\frac{sin(\alpha)}{sin(\beta)}\beta>\alpha\Rightarrow\frac{\beta}{sin(\beta)}>\frac{\alpha}{sin(\alpha)},\ \ \beta>\alpha,\{\alpha,\beta\}\subset[0,\pi].$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ფუნქცია $f(x)=\dfrac{x}{\sin(x)}$ ზრდადია:

$$f'(x)=\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{\sin^2(x)}>0\Leftrightarrow tg(x)>x,\ x\in[0,\frac{\pi}{2}]$$

როდესაც $x=0$, მაშინ $tg(x)=x=0$. თუ $tg(a)=a$ რომელიმე $a\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$-სათვის, მაშინ $tg'(b)=x'=1$, რომელიღაც $b\in[0,a]$-სათვის, რაც შეუძლებელია, რადგან სრულდება უტოლობა: $tg'(x)=\dfrac{1}{\cos(x)^2}>1,\ \ x>0$.

კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი განსხვავება ჩვეულებრივ (ევკლიდურ) გეომეტრიასა და სფერულ გეომეტრიას შორის ისაა, რომ სფერული გეომეტრიის წრფეზე განლაგებული წერტილებისთვის არ არსებობს ცნება "***შორის მდებარეობს***". ნახაზებზე გამოსახულია ორი - ჩვეულებრივი და სფერული - წრფე, რომლებიც სამ წერტილზე გადის:

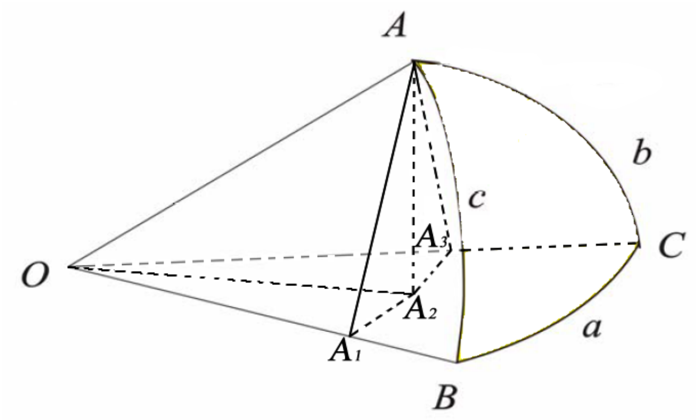


როგორც გვახსოვს, ევკლიდურ გეომეტრიაში ერთ წრფეზე მდებარე A,B,C წერტილებისთვის B *მდებარეობს* A*-სა და* B*-ს შორის* ნიშნავს იმას, რომ

$$|AC|=|AB|+|BC|.$$

სფერულ გეომეტრიაში, თუ ორი წერტილის შემაერთებელ მონაკვეთად მივიჩნევთ ამ ორ წერტილზე გამავალი დიდი წრეწირის უმცირეს რკალს, მაშინ წამოიჭრება ასეთი სირთულე: თუ დიდ წრეწირზე გვაქვს სამი ისეთი წერტილი (A, B, C), რომლებიც ამ წრეწირს სამ ტოლ ნაწილად ყოფს, მაშინ შეუძლებელია იმის განსაზღვრა, რომელი მათგანია დანარჩენ ორს შორის.

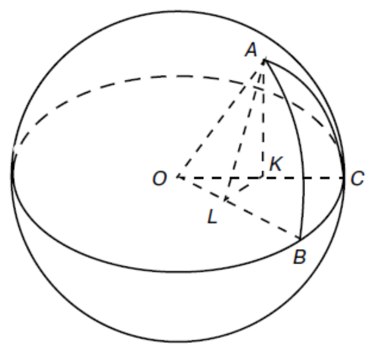
შეიძლება ითქვას, რომ სფეროზე ორ წერტილს შორის მანძილი ეწოდება ამ ორ წერტილზე გამავალი დიდი წრეწირის უმცირესი რკალის სიგრძეს. ბუნებრივად წამოიჭრება კითხვა: აკმაყოფილებს თუ არა ამგვარად განსაზღვრული მანძილი სამკუთხედის უტოლობას?



ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა ის, რომ ეს მანძილი პროპორციულია ამ წერტილებზე გამავალ რადიუსებს შორის არსებული კუთხისა, ხოლო ამ კუთხეებს შორის სრულდება უტოლობა: $\angle A_1OA_3 < \angle A_1OA + \angle AOA_3$ სადაც A_2 არის A-ს გეგმილი BOC სიბრტყეზე, ხოლო A_2A_1 და A_2A_3 მონაკვეთები, შესაბამისად, OB და OC მონაკვეთების მართობულია.

სფერულ გეომეტრიაში შემოდის კუთხის ცნებაც. კუთხე ორ წრფეს შორის ეწოდება ამ წრფეების (დიდი წრეწირების) განმსაზღვრელ სიბრტყეებს შორის არსებულ კუთხეს.

პითაგორას თეორემის სფერული ანალოგი



სიმარტივისთვის დავუშვათ, რომ სფეროს რადიუსი 1-ის ტოლია. ნახაზზე გამოსახულია ABC მართკუთხა სამკუთხედი, რომელშიც C არის მართი კუთხის წვერო. დავუშვათ, $|BC| = a,\ |CA| = b,\ |AB| = c$, სადაც სიგრძეები მოცემულია სფერულ გეომეტრიაში. განვახორციელოთ დამხმარე აგებები. A წერტილიდან დავუშვათ AK პერპენდიკულარი OC რადიუსზე. ვინაიდან AOC და BOC სიბრტყეები მართობულია, AK მონაკვეთი BOC სიბრტყის მართობული იქნება. K წერტილიდან დავუშვათ OB რადიუსის მართობი KL. სამი მართობულის შესახებ თეორემის თანახმად, AL მონაკვეთი ასევე მართობული იქნება OB რადიუსისა. გვაქვს: $a = \angle BOC,\ b = \angle COA,\ c = \angle AOB$. AOK, AOL და KOL მართკუთხა სამკუთხედებიდან ვპოულობთ: $OK = \cos(b),\ OL = \cos(c) = OK\cos(a)$, ხოლო აქედან ვიღებთ: $\cos(c) = \cos(a)\cos(b)$. ეს უკანასკნელი არის პითაგორას თეორემის ანალოგი სფერული გეომეტრიის შემთხვევაში.

ნებისმიერი R რადიუსის მქონე სფეროს შემთხვევაში გვექნება გამოსახულება:

$$\cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}.$$

როდესაც $R \to \infty$ სფერო სულ უფრო მეტად "ბრტყელდება" და მისი გეომეტრია ევკლიდური ხდება. თუ a-სა და b-ს ჩავთვლით მუდმივებად და გამოვიყენებთ მიახლოებას

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

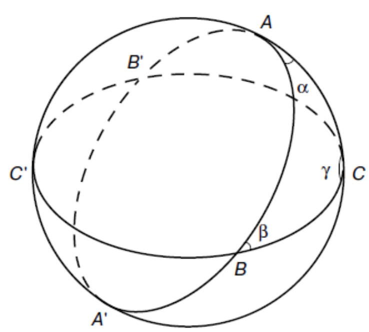
რომელიც სამართლიანია, როდესაც $x \to 0$, გვექნება

$$1 - \frac{c^2}{2R^2} + o\left(\frac{1}{R^2}\right) =$$
$$= \left(1 - \frac{a^2}{2R^2} + o\left(\frac{1}{R^2}\right)\right)\left(1 - \frac{b^2}{2R^2} + o\left(\frac{1}{R^2}\right)\right) =$$
$$= 1 - \frac{a^2 + b^2}{2R^2} + o\left(\frac{1}{R^2}\right),$$

საიდანაც ვიღებთ $c^2 = a^2 + b^2 + o(1)$. ზღვარში, როდესაც $R \to \infty$, გვექნება საყოველთაოდ ცნობილი პითაგორას თეორემა: $c^2 = a^2 + b^2$.

სამკუთხედის ფართობი სფერულ გეომეტრიაში

დავადგინოთ ABC სფერული სამკუთხედის ფართობის ფორმულა. ABC სამკუთხედი არის სამი ნახევარსფეროს P, Q, R-ის თანაკვეთა. ამ ნახევარსფეროების საზღვრების წრეწირები შეიცავს BC, CA და AB გვერდებს. ნახაზზე გამოსახულ სფეროზე P არის "ზედა" ნახევარსფერო, Q - "წინა" ნახევარსფერო, ხოლო R - "მარჯვენა" ნახევარსფერო.



როგორც ცნობილია, ნახევარსფეროს ფართობი 2π-ს ტოლია. ორი ნახევარსფეროს თანაკვეთის ფართობი პირდაპირპროპორციულია ამ ნახევარსფეროების შემომსაზღვრელ წრეწირებს შორის არსებული კუთხისა. თუ ეს კუთხე π-ს ტოლია, მაშინ ეს თანაკვეთა თვითონაა ნახევარსფერო და მისი ფართობი 2π-ს ტოლია. აქედან გამომდინარე, პროპორციულობის კოეფიციენტი 2-ის ტოლია. ამიტომ Q-ს R-თან, R-ის P-სთან და P-ს Q-სთან თანაკვეთების ფართობები, შესაბამისად, იქნება 2α, 2β და 2γ, სადაც α, β და γ სამკუთხედის კუთხეებია, როგორც ეს ნახაზზეა გამოსახული. P, Q, R ნახევარსფეროების გაერთიანება არის მთელ სფეროს გამოკლებული $A'B'C'$ სამკუთხედი, რომელიც ABC სამკუთხედის ანტიპოდია. ამ უკანასკნელის ფართობი აღვნიშნოთ S-ით. მაშინ $A'B'C'$ სამკუთხედის ფართობი ასევე S-ის

ტოლი იქნება. აქედან გამომდინარე, $\boldsymbol{P, Q, R}$ ნახევარსფეროების გაერთიანების ფართობი იქნება $\boldsymbol{4\pi - S}$. მეორე მხრივ, ამ ნახევარსფეროების გაერთიანების ფართობი შეიძლება გამოვითვალოთ როგორც $\boldsymbol{P, Q, R}$ ნახევარსფეროების ფართობების ჯამს გამოკლებული მათი წყვილ-წყვილად თანაკვეთის ფართობთა ჯამი, რომლებიც ორჯერ შევიდა ჯამში; ამას ემატება $\boldsymbol{ABC}$ სამკუთხედის ფართობი, რომელიც არ შესულა ჯამში (იგი სამჯერ იქნა აღებული, ნახევარსფეროების შეკრების დროს, მაგრამ შემდეგ სამჯერ გამოვაკელით წყვილ-წყვილი თანაკვეთების გამოკლების შემდეგ). ყოველივე ამის შედეგად ვიღებთ განტოლებას:

$$4\pi - S = 2\pi + 2\pi + 2\pi - 2\alpha - 2\beta - 2\gamma + S.$$

საიდანაც ვიღებთ: $S = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.

ამრიგად, ვხედავთ, რომ სფერული სამკუთხედის კუთხეების ჯამი ყოველთვის მეტია $\boldsymbol{\pi}$ -ზე და ეს "ნამატია" სწორედ ამ სფერული სამკუთხედის ფართობი. ძალზე მცირე ზომის სფერული სამკუთხედის კუთხეების ჯამი ახლოსაა $\boldsymbol{\pi}$ -სთან, ეს კი შეესაბამება იმ ფაქტს, რომ "ძალზე მცირე" სამკუთხედი სფეროზე "თითქმის ევკლიდურია".