ზაქარია გიუნაშვილი

ციფრული მონეტა - ელექტრონული ცხრილის გამოყენება ალბათური ექსპერიმენტის სიმულაციისთვის

პასკალის სამკუთხედი - ისტორიული კონტექსტის მიმოხილვა

1653 წელს ფრანგმა მათემატიკოსმა და ფილოსოფოსმა ბლეზ პასკალმა მონეტის აგდების შედეგების შესაბამისი რიცხვების სამკუთხა კონფიგურაცია აღწერა. შევნიშნავთ, რომ ეს იგივეა, რაც m ცალი ობიექტიდან n ცალი ობიექტის შესაძლო ამორჩევათა რაოდენობა. მიუხედავად იმისა, რომ პასკალს ამ აღმოჩენაზე პრეტენზია არ გამოუთქვამს, მისი სახელი განუყრელად დაუკავშირდა ამ ფაქტს და რიცხვების ამ სამკუთხა კონფიგურაციას *პასკალის სამკუთხედი* ეწოდა. სინამდვილეში ეს სამკუთხედი რამდენიმე საუკუნით ადრე აღიწერა. პირველად იგი იხსენიება ინდოელი მათემატიკოსის პინგალას წიგნში, რომელიც სანსკრიტულ პოეზიას ეძღვნება და შეიქმნა ჩვენს წელთაღრიცხვამდე დაახლოებით 450 წელს. ასევე ცნობილია, რომ ამ სამკუთხედის შესახებ იცოდნენ ძველმა ჩინელმა მათემატიკოსებმა. მოგვიანებით სპარსმა მათემატიკოსმა ყარაჯიმ და პოეტმა-ასტრონომმა ომარ ხაიამმა იგი მოიხსენიეს როგორც „ხაიამის სამკუთხედი". ცნობილი იყო მასთან დაკავშირებული რამდენიმე თეორემა, მათ შორის - ე.წ. ბინომური თეორემა. იტალიაში ამ სამკუთხედს "*Triangolo di Tartaglia*" -ს (ტარტალიას სამკუთხედს) უწოდებდნენ იტალიელი მათემატიკოსის ნიკოლო ფონტანა ტარტალიას პატივსაცემად. შევნიშნავთ, რომ იგი ცხოვრობდა ბლეზ პასკალზე საუკუნით ადრე. ტარტალია აგრეთვე ცნობილია როგორც კუბური განტოლების ფესვების ფორმულის ავტორი.

პასკალის სამკუთხედის პირველი 7 სტრიქონი ასე გამოიყურება:

1	**r = 0**
1 1	**r = 1**
1 2 1	**r = 2**
1 3 3 1	**r = 3**
1 4 6 4 1	**r = 4**
1 5 10 10 5 1	**r = 5**
1 6 15 20 15 6 1	**r = 6**

მივაქციოთ ყურადღება, რომ სამკუთხედის შიგნით ყოველი რიცხვი ტოლია მის თავზე მდგომი ორი რიცხვის ჯამის.

ზოგადი აღწერა

როგორც ცნობილია, მონეტის აგდება ერთ-ერთი ყველაზე გავრცელებული ექსპერიმენტია, რომელსაც ალბათობის თეორიის სხვადასხვა საკითხის შესწავლისას მიმართავენ. იგი სიმარტივითა და ხელმისაწვდომობით გამოირჩევა. გარდა ალბათობის თეორიისა, მას ხშირად იყენებენ სხვადასხვა რეალურ კონტექსტში. მაგალითად, მონეტის აგდებით განისაზღვრება, ვინ დაიწყებს საფეხბურთო

მატჩს. „წესიერი“ მონეტის შემთხვევაში გერბისა და საფასურის მოსვლის ალბათობა თანაბარია. ამ შემთხვევაში ჩვენი მიზანია იმის დემონსტრირება:

1. როგორ შეიძლება მონეტის აგდების ექსპერიმენტის გამოყენება მონაცემთა შესაგროვებლად, დასამუშავებლად და თეორიული და პრაქტიკული შედეგების ერთმანეთთან შესადარებლად;

2. როგორ შეიძლება ინფორმაციული ტექნოლოგიების, კერძოდ - ელექტრონული ცხრილის, გამოყენება ალბათური ექსპერიმენტის სიმულაციისთვის, თეორიის შესაბამისი გამოთვლების შესასრულებლად და მიღებული მონაცემების ორგანიზებისა და წარმოჩენისთვის.

ამ შემთხვევაში ექსპერიმენტია 6 ერთნაირი მონეტის აგდება (ალბათობის თეორიის თვალსაზრისით, ეს იგივეა, რაც ერთი მონეტის ზედიზედ 6-ჯერ აგდება). ვიდრე ამ ექსპერიმენტისა და მისი შედეგების აღწერას შევუდგებით, გავიხსენოთ მისი თეორიული საფუძვლები და კავშირი პასკალის სამკუთხედთან. განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა: *ვთქვათ, ვაგდებთ n ცალ მონეტას; რისი ტოლია იმის ალბათობა, რომ მათ შორის k ცალზე მოვა საფასური?*

თუ შევთანხმდებით, რომ საფასურის მოსვლა აღვნიშნოთ 1-ით, ხოლო გერბისა - 0-ით, მაშინ ასეთი ექსპერიმენტის შედეგი შეგვიძლია ჩავწეროთ როგორც ნულებისა და ერთების n-ელემენტიანი მიმდევრობა: $\underbrace{00010110\cdots0110}_{n\ \text{ცალი}}$. მაგალითად, სურათზე აღბეჭდილი ვითარება გამოისახება როგორც 110101. როგორც კომბინატორიკიდან არის ცნობილი, ასეთ მიმდევრობათა საერთო რაოდენობა 2^n-ის ტოლია, ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ხდომილებათა სივრცე 2^n-ელემენტიანია. n-ელემენტიან მიმდევრობაში k პოზიციის შერჩევა შესაძლებელია C_n^k სხვადასხვა ხერხით. აქედან გამომდინარე, n ცალი მონეტის აგდების (როგორც ითქვა, ეს იგივეა, რაც ერთი მონეტის n-ჯერ აგდება) შედეგად k საფასურის მოსვლის ალბათობა გამოისახება ფორმულით

$$P(n,k) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot C_n^k = 2^{-n} \cdot C_n^k.$$

შევნიშნოთ, რომ პასკალის სამკუთხედის თვისება, მის შიგნით ნებისმიერი რიცხვი უდრიდეს მის თავზე მდგომი ორი რიცხვის ჯამს, შეესაბამება ტოლობას

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

გავიხსენოთ, რომ C_n^k რიცხვებს ეწოდება ბინომური კოეფიციენტები, ხოლო ბინომური განაწილება ეწოდება ალბათობებს

$$P(n,0), P(n,1), P(n,2), \dots\ P(n,n).$$

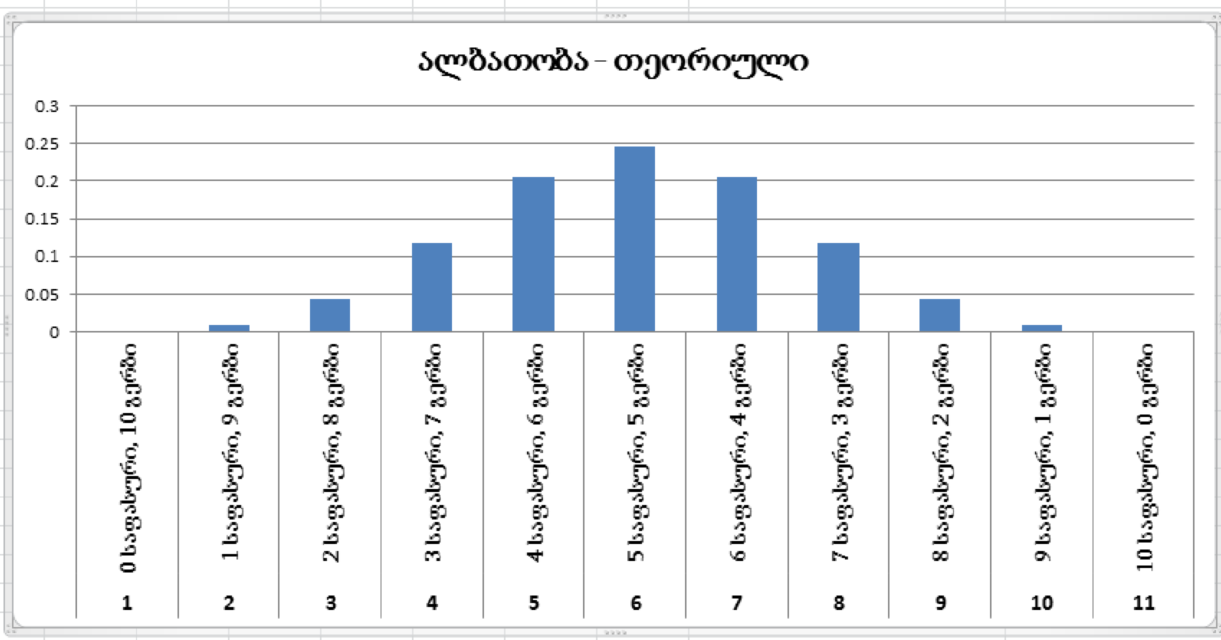
ელექტრონული ცხრილის გამოყენებით შესაძლებელია ამ რიცხვების გამოთვლა და შესაბამისი სვეტოვანი დიაგრამის აგება. ამისთვის გამოვიყენოთ საოფისე პაკეტის ერთ-ერთი გავრცელებული პროგრამა $Microsoft\,Office\,Excel$. ბინომური კოეფიციენტების გამოსათვლელად შეგვიძლია

გამოვიყენოთ $Excel$ -ის ფუნქცია $COMBIN(\cdots,\cdots)$. თუ გამოთვლებს ჩავატარებთ 10 მონეტის შემთხვევისთვის, შესაძლებელია ასეთი ცხრილის მიღება:

#	ხდომილება	ალბათობა - თეორიული	
1	0 საფასური, 10 გერბი	0.000976563	=COMBIN(10, 0)/2^10
2	1 საფასური, 9 გერბი	0.009765625	=COMBIN(10, 1)/2^10
3	2 საფასური, 8 გერბი	0.043945313	
4	3 საფასური, 7 გერბი	0.1171875	.
5	4 საფასური, 6 გერბი	0.205078125	.
6	5 საფასური, 5 გერბი	0.24609375	.
7	6 საფასური, 4 გერბი	0.205078125	
8	7 საფასური, 3 გერბი	0.1171875	
9	8 საფასური, 2 გერბი	0.043945313	=COMBIN(10, 8)/2^10
10	9 საფასური, 1 გერბი	0.009765625	=COMBIN(10, 9)/2^10
11	10 საფასური, 0 გერბი	0.000976563	=COMBIN(10, 10)/2^10

ცხრილის ბოლო სვეტში ჩაწერილი რიცხვები მიიღება შესაბამის უჯრებში იმ ფორმულების ჩაწერით, რომლებიც ნახაზზეა მითითებული.

ამ ცხრილის მიხედვით შესაძლებელია შესაბამისი დიაგრამის აგებაც (იხ. ნახ.):



ეს ცხრილი და დიაგრამა მოსწავლეებს საკმაოდ ნათელ წარმოდგენას შეუქმნის ბინომური განაწილების შესახებ.

ასევე სასარგებლოა ამ ექსპერიმენტის ჩატარება რეალურად და მიღებული შედეგების შედარება თეორიულ ალბათობასთან.

თეორიული ალბათობა და რეალური ექსპერიმენტი

რა თქმა უნდა, რეალური ექსპერიმენტის ჩატარებისას შედეგის სიზუსტე იმაზეა დამოკიდებული, რამდენჯერ გამეორდება ექსპერიმენტი.

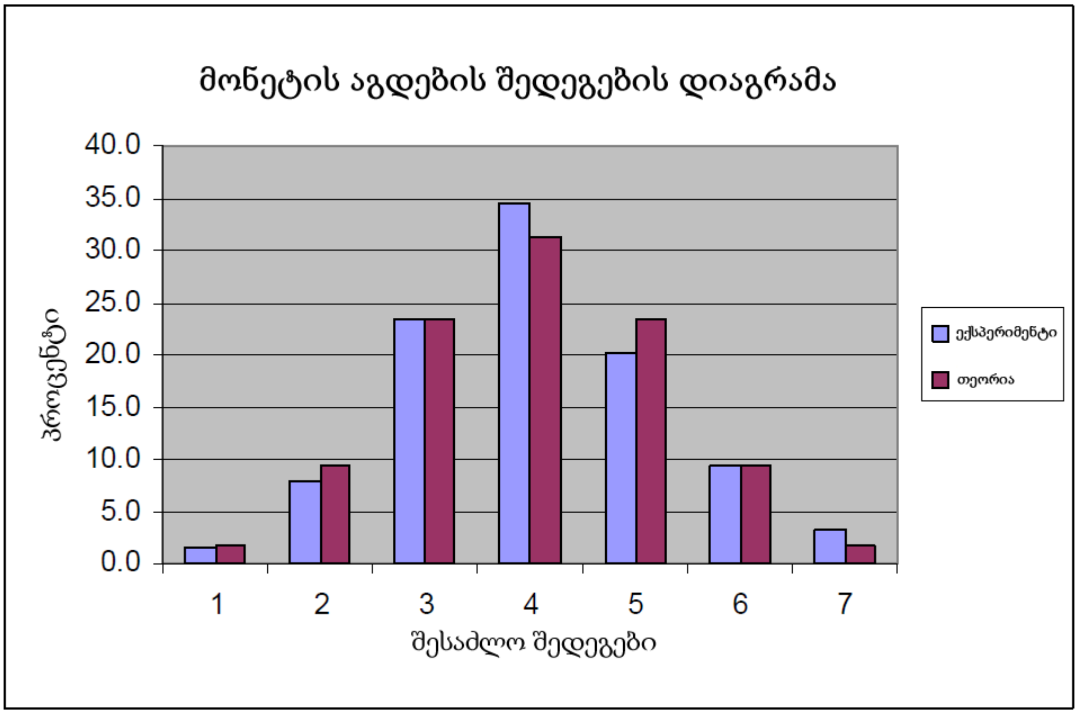
ექსპერიმენტის ჩატარებასთან დაკავშირებული აქტივობისას მოსწავლეები შეიძლება დაიყონ რამდენიმე ჯგუფად და თითოეულ ჯგუფს დაურიგდეს ყუთი, რომელშიც რამდენიმე მონეტაა მოთავსებული. მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ უკვე 10 მონეტის შემთხვევაში ძალიან მცირე ან ძალიან დიდი რაოდენობის საფასურის მოსვლის ალბათობა საკმაოდ მცირეა და თვალსაჩინო შედეგის მისაღებად მოსწავლეებს ძალიან დიდი რაოდენობის ექსპერიმენტის ჩატარება მოუწევთ, ამიტომ უფრო ადეკვატური იქნება, მონეტების რაოდენობა არც ისე დიდი იყოს. მაგალითად, სასურველი შედეგის მისაღებად სავსებით საკმარისია 6 მონეტა და ცდის 64-ჯერ გამეორება. ჯგუფებს ექნებათ წინასწარ გამზადებული ელექტრონული ცხრილი, რომელშიც აღნუსხავენ ცდის შედეგებს (იხ. ნახ.):

მონეტის აგდების ცხრილი

#	ხდომილება	შედეგის ჩანიშვნა	მთლიანი რაოდენობა	პროცენტი	პროცენტი თეორიულად
1	0ს , 6გ				1.6%
2	1ს , 5გ				9.4%
3	2ს , 4გ				23.4%
4	3ს , 3გ				31.3%
5	4ს , 2გ				23.4%
6	5ს , 1გ				9.4%
7	6ს , 0გ				1.6%
		ცდების რაოდენობა:			

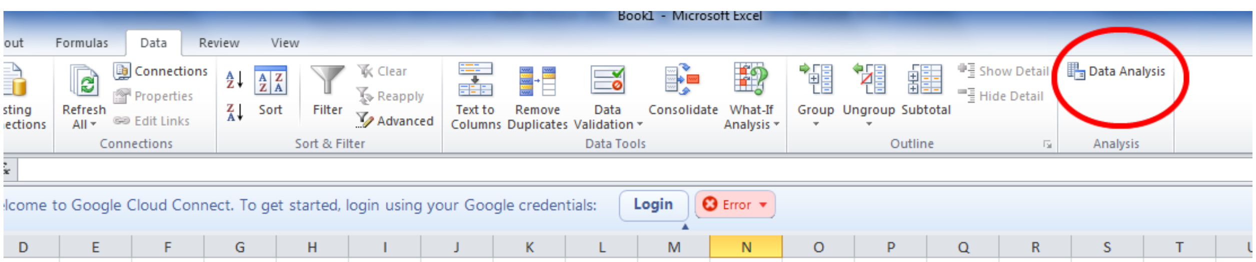
ცდების მთლიანი რაოდენობის მისაღებად შეგვიძლია გამოვიყენოთ $Excel$-ის ინტეგრირებული ფუნქცია $=SUM(\cdots)$.

ექსპერიმენტის შედეგად მიღებული და თეორიული ალბათობების შედარების მიზნით მოსწავლეებმა შეიძლება ააგონ სვეტოვანი დიაგრამა:



ექსპერიმენტის კომპიუტერული სიმულაცია

Excel -ს აქვს მონაცემთა ანალიზის მოდული, რომელიც მოიცავს შემთხვევითი რიცხვების გენერატორს. ჩვეულებრივ, ეს მოდული მოთავსებულია *Data*ჯგუფის *Analysis* განყოფილებაში (იხ. ნახ.):



თუ ეს განყოფილება არ ფუნქციობს, იგი უნდა გააქტიურდეს:

$$File \rightarrow Options \rightarrow Add - Ins \rightarrow Manage\ (Excel\ Add - ins), Go \rightarrow Analysis\ ToolPak.$$

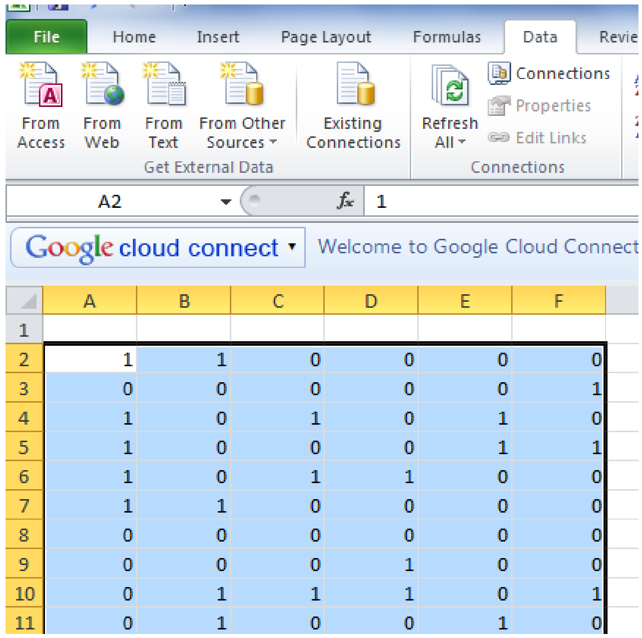
ამ ფუნქციის გამოყენებით ექსპერიმენტის კომპიუტერული სიმულაცია შესაძლებელია ასე:

Tools ჯგუფში ვირჩევთ *Data Analysis* , ხოლო შემდეგ ვირჩევთ *Random Number Generator* -ს. გამოჩნდება დიალოგური ფანჯარა, რომელშიც ჩავწერთ შემდეგ პარამეტრებს:

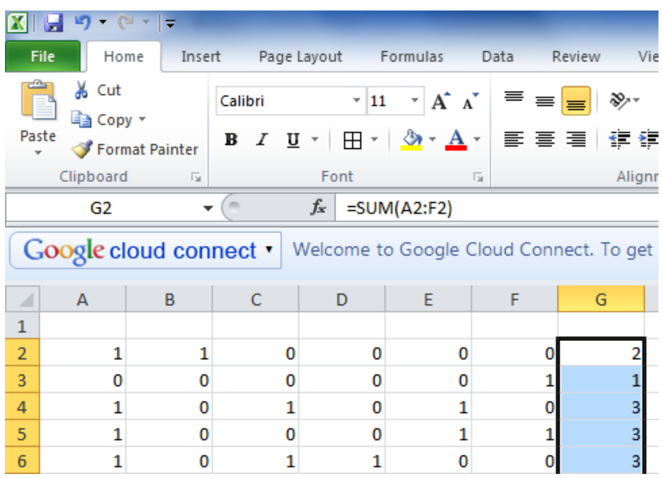
- $Number\ of\ Variables$: 6
- $Number\ of\ Random\ Numbers$: 100
- $Distribution$: $Binomial$
- $p\ Value$: 0.5
- $Number\ of\ Trials$: 1

- *Random Seed*: *ცარიელი*
- *Output Range*: *ცხრილში ვირჩევთ რომელიმე უჯრას, მაგალითად* $A2 -$ *ს.*

OK ღილაკზე დაჭერის შედეგად ცხრილის 100 სტრიქონში ჩაიწერება ინდივიდუალური ცდის (6 მონეტის აგდება) შედეგები 0-ებისა და 1-ების მიმდევრობათა სახით (იხ. ნახ.):



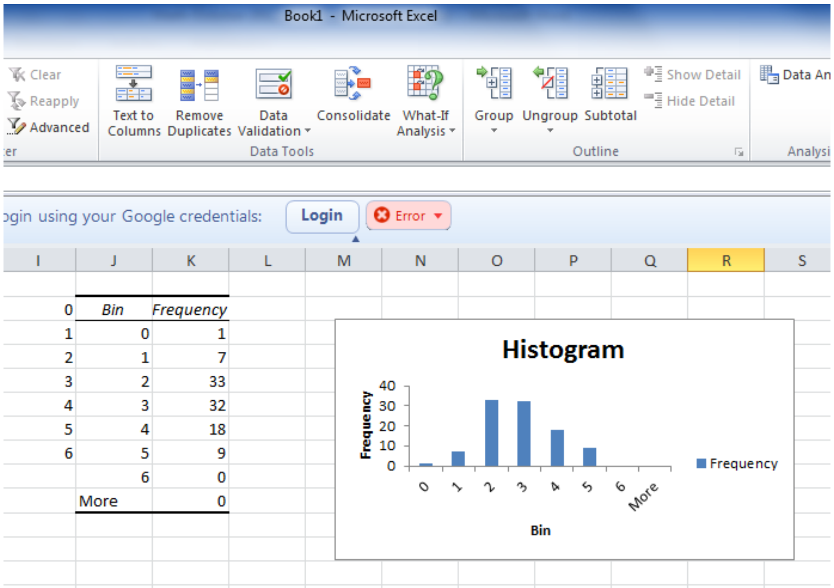
$= Sum(\cdots)$ ფუნქციის გამოყენებით ყოველი სტრიქონის ბოლოს გამოვითვლით სტრიქონში 1-ების რაოდენობას (იხ. ნახ.):



სვეტში, რომლის სათაურია I, მიმდევრობით ჩავწეროთ რიცხვები 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. ისევე როგორც წინა შემთხვევაში, გადავიდეთ *Data* → *Data Analysis* განყოფილებაში და ავირჩიოთ ჰისტოგრამა *Histogram*. შემდეგ შევავსოთ პარამეტრების მიმდევრობა:

- *Input Range*: *მოვნიშნოთ ჯამები (სვეტი G)*
- *Bin Range*: *მოვნიშნოთ I სვეტში შეტანილი რიცხვები* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
- *Output Range*: *კურსორი ჩავსვათ J2 უჯრაში*
- *დიაგრამის ჩასასმელად მოვნიშნოთ* "*Chart Output*"

ამ პროცედურების შესრულების შედეგად მიიღება ასეთი სურათი:



ელექტრონული ცხრილის ფურცელზე გამოისახება როგორც ცდების შედეგების სიხშირეთა განაწილება, ასევე შესაბამისი სვეტოვანი დიაგრამა. ვინაიდან ცდების რაოდენობა 100-ის ტოლია, მიღებული სიხშირეები ემთხვევა პროცენტულ მაჩვენებლებს. ამის შემდეგ მოსწავლეებს შეუძლიათ ერთმანეთს შეადარონ ექსპერიმენტის შედეგები, კომპიუტერული სიმულაციის შედეგები და თეორიული (ფორმულით მიღებული) შედეგები.

რეალური მოვლენების შესწავლის დროს აუცილებელია რეალური ექსპერიმენტების ჩატარება და შედეგების აღნუსხვა, რაც თავისთავად გულისხმობს მოსწავლისთვის შესაბამისი უნარ-ჩვევების განვითარებას. მიუხედავად ამისა, ხშირად ძალზე მოხერხებულია ექსპერიმენტის კომპიუტერული სიმულაციის გამოყენება. კომპიუტერული სიმულაცია, გარდა იმისა, რომ შედეგების სწრაფად და მარტივად მიღების საშუალებას იძლევა, ინფორმაციული ტექნოლოგიების გამოყენებასთან დაკავშირებულ კომპეტენციებსაც ავითარებს.