ზაქარია გიუნაშვილი

„უცნაური“, მაგრამ საინტერესო საკითხები ალბათობის თეორიიდან

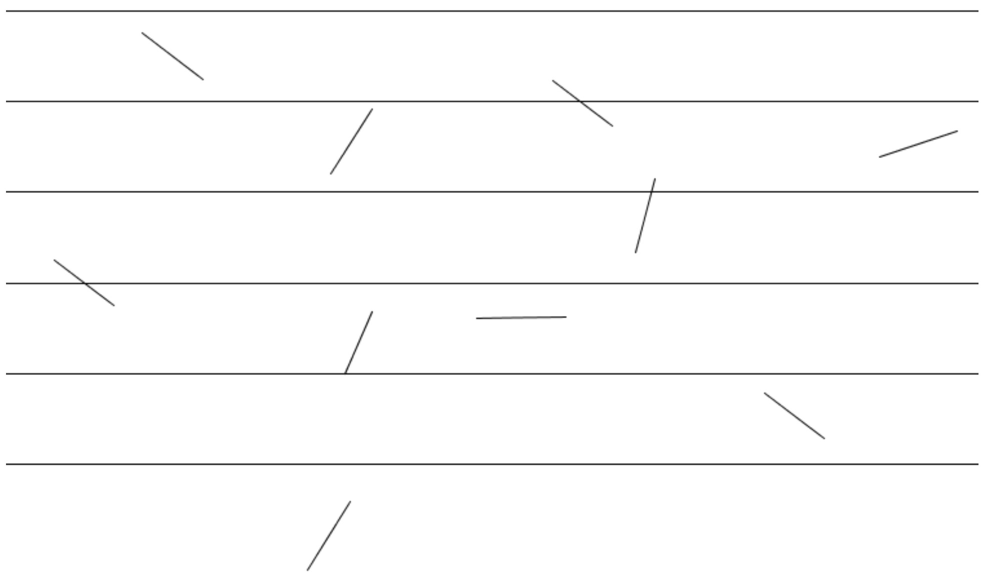
სიტყვა ალბათობა ასე თუ ისე ყველასათვის ნაცნობია. მიუხედავად ამისა, ამ ტერმინის ზუსტი განსაზღვრების მიებისას ვაწყდებით სხვადასხვა განსხვავებულ ფორმულირებას. ალბათობა ჩვენ გარშემო ყოველი ფეხის ნაბიჯზე გვხვდება. იგი დაკავშირებულია მოვლენის (ხდომილობის) მოხდენის შესაძლებლობის გაზომვასთან. გაზომვა ყოველთვის დაკავშირებულია რიცხვით სიდიდესთან. მაგალითად, როდესაც ვსაუბრობთ ლატარიის მოგების შესაძლებლობაზე, საქმე გვაქვს ალბათობასთან. ე.ი. იმ მოგების შესაძლებლობის გაზომვასთან. არსებობს სხვადასხვა ხერხები, რომლებსაც იყენებენ ამ გაზომვის დროს. ბევრი მათგანი წმინდა მათემატიკურია. ხშირად ალბათობის (ე.ი. მოვლენის შესაძლებლობის ზომის) დადგენა აუცილებლად მოითხოვს მონაცემების შეგროვებას, დაკვირვებას. მაგალითად, ამინდის პროგნოზირება, სამედიცინო დიაგნოზის დასკვნა, სოციალური პროგნოზის გაკეთება. მიუხედავად ამისა, შეგროვებული მონაცემების დამუშავება და მათ საფუძველზე პროგნოზირება, ყოველთვის მოითხოვს იმ მათემატიკური აპარატის გამოყენებას, რომელსაც ალბათობის თეორია ეწოდება. ეს მათემატიკური აპარატი ხშირად ბევრი ძალზე უცნაური და საინტერესო შედეგის მიღების შესაძლებლობას იძლევა.

„ჭკვიანი“ ნემსი: ბიუფონის ამოცანა

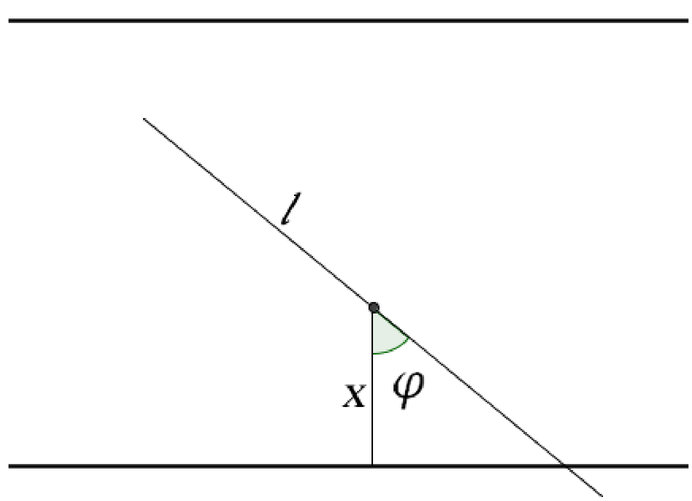
სასკოლო მათემატიკის საკითხებში ოდნავ მაინც ჩახედული მკითხველისათვის რა თქმა უნდა ცნობილია წრეწირის სიგრძის გამოსათვლელი ფორმულა $S = 2\pi R$, სადაც π არის ტრანსცენდენტური რიცხვი, რომლის მიახლოებითი მნიშვნელობა მეასედებამდე სიზუსტით ტოლია 3.14-ის. არსებობს ამ რიცხვის მაღალი სიზუსტით გამოთვლის მრავალი სხვადასხვა ხერხი. მათ შორის ერთ-ერთი ხერხი დაკავ-შირებულია ჩვეულებრივი საკერავი ნემსის გამოყენებასთან.

ფურცელზე გავავლოთ რამოდენიმე ურთიერთპარალელური წრფე შემდეგი წესების დაცვით:

1) ამ პარალელურ წრფეებს შორის მანძილები იყოს ერთმანეთის ტოლი;
2) ორ მეზობელ პარალელურ წრფეს შორის მანძილი მეტი იყოს ნემსის სიგრძეზე;
3) ფურცელი უნდა იყოს იმდენად დიდი, რომ მასზე შემთხვევით ნასროლი ნემსი არ დაეცეს ფურცლის გარეთ.



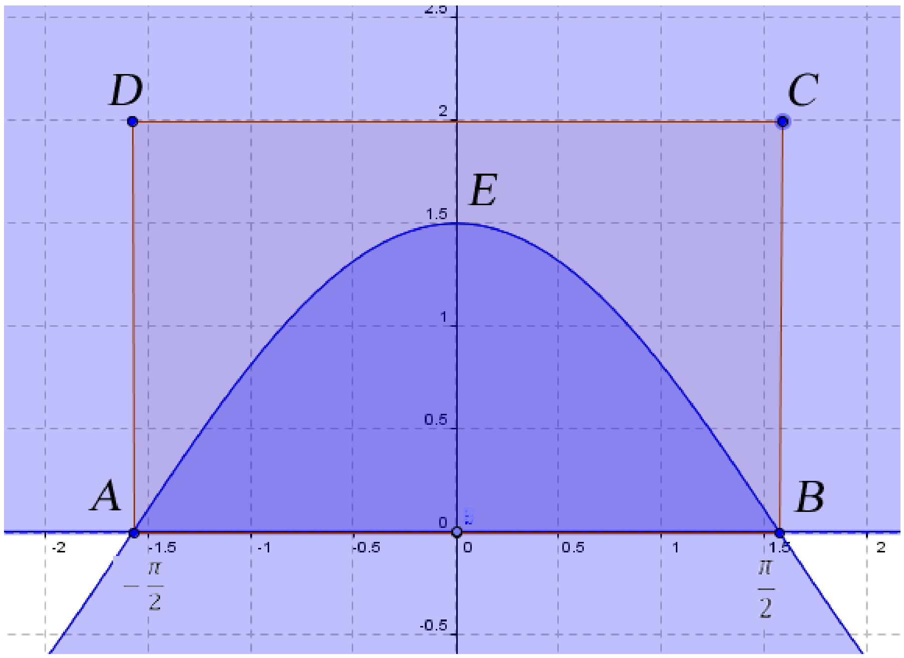
დავუშვათ მანძილი პარალელურ წრფეებს შორის a-ს ტოლია, ხოლო ნემსის სიგრძე l-ის ტოლია ($l < a$). ფურცელზე შემთხვევით ნასროლი ნემსის მდებარეობა განისაზღვრება x მანძილით მისი შუაწერტილიდან უახლოეს წრფემდე და φ კუთხით, რომელსაც ნემსი ადგენს მისი შუაწერტილიდან წრფისადმი დაშვებულ მართობთან.



ცხადია რომ სრულდება ასეთი უტოლობები

$$0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

ავაგოთ $x = \frac{l}{2}\cos(\varphi)$ დამოკიდებულების გრაფიკი



განვსაზღვროთ A ხდომილების ალბათობა სადაც,

$A =$ "*შემთხვევით ნასროლი ნემსი გადაკვეთს ერთ − ერთ წრფეს*".

ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს გეომეტრიულ ალბათობასთან. კერძოდ, ნემსის ის მდგომარეობა, როდესაც იგი გადაკვეთს რომელიმე წრფეს განისაზღვრება ასეთი უტოლობით

$$x \leq \frac{l}{2}\cos(\varphi).$$

ამ პირობას აკმაყოფილებს ყველა ის წერტილი, რომელიც ნახაზზე გამოსახულია გამუქებული ABE მრუდწირული არის სახით. ხოლო ნემსის ყველა შესაძლო მდებარეობები აღიწერება $ABCD$ მართკუთხედის საშუალებით. აქედან გამომდინარე, A ხდომილების ალბათობა გამოითვლება შეფარდებით

$$P(A) = \frac{S(ABE)}{S(ABCD)}.$$

სადაც S აღნიშნავს ფართობს. ცხადია, რომ $ABCD$ მართკუთხედის ფართობი ტოლია $a\pi/2$ -ის, ხოლო $S(ABE)$ გამოითვლება მრუდწირული ფიგურის ფართობების გამოსათვლელი ფორმულით:

$$S(ABE) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2}\cos(\varphi)\,d\varphi = \frac{l}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = l.$$

აქედან გამომდინარე, საძიებელი ალბათობა ტოლია $P(A) = \frac{2l}{a\pi}$. ეს ტოლობა შეიძლება ასე ჩავწეროთ $\pi = \frac{2l}{aP(A)}$, რაც საშუალებას გვაძლევს მიახლოებით გამოვთვალოთ π რიცხვის მნიშვნელობა. მაგალითად, თუ ექსპერიმენტის დროს ნემსი ფურცელზე დავაგდეთ n-ჯერ და მან გადაკვეთა წრფე m-ჯერ, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ მიახლოებითი ტოლობა $\pi \approx \frac{2ln}{am}$. მკითხველს ვთავაზობთ თავად დარწმუნდეს იმაში თუ რამდენად „ჭკვიანია“ ჩვეულებრივი საკერავი ნემსი და როგორ შეუძლია მას დაგვეხმაროს π რიცხვის მიახლოებით მნიშვნელობის გამოთვლაში. რა თქმა უნდა, არ უნდა დაგვავიწყდეს, რომ ჩატარებული ცდების რაოდენობა უნდა იყოს საკმაოდ დიდი. მაგალითად, თუ ნემსს ფურცელზე დავაგდებთ დაახლოებით 1000-ჯერ, შედეგი შეიძლება იყოს 3.1419.

შევალიე დე მერეს ამოცანა

შუა საუკუნეებში მაღალი წრის საზოგადოებაში საკმაოდ გავრცელებული იყო აზარტული თამაშები. მათი ერთ-ერთი ცნობილი მიმდევარი იყო ფრანგი შევალიე დე მერე. იგი ცნობილი ფრანგი მათემატიკოსის, პასკალის საკმაოდ ახლო მეგობარი იყო. დე მერე არა მხოლოდ თამაშით იყო გატაცებული, არამედ ცდილობდა რაღაც კანონზომიერებები აღმოეჩინა. თუმცა, მას არ ქონდა საკმარისი ცოდნა იმისათვის, რომ ეს კანონზომიერებები აეხსნა და დაესაბუთებინა. ამისათვის იგი ხშირად მიმართავდა თავის მეგობარ პასკალს.

დე მერე თამაშის დროს თავის პარტნიორებს ასეთ პირობას თავაზობდა: იგი გააგორებს კამათლების წყვილს 24-ჯერ და მოგებულად ჩაითვლება, თუ თუნდაც ერთხელ მოვა წყვილი 6-იანი; მისი მოწინააღმდეგე გააგორებს 4 კამათელს მხოლოდ ერთხელ და მოგებულად ჩაითვლება იმ შემთხვევაში, თუ ერთი 6-იანი მაინც მოვა.

ერთი შეხედვით შეიძლება მოგვეჩვენოს რომ დე მერეს უპირატესობა ქონდა, იგი ხომ 24-ჯერ აგორებდა კამათლებს, ხოლო მისი მოწინააღმდეგე - მხოლოდ ერთხელ. მიუხედავად ამისა, პრაქტიკამ აჩვენა რომ დე მერე უფრო ხშირად აგებდა ვიდრე იგებდა. გაოცებულმა დე მერემ პასკალს მიმართა. პასკალმა შეასრულა სათანადო გამოთვლები და მათემატიკურად დაუსაბუთა პრაქტიკაში მიღებული შედეგის სამართლიანობა. ეს გამოთვლები დაახლოებით ასე გამოიყურებოდა.

დავუშვათ A არის ასეთი ხდომილება: A=***"კამათლის წყვილის 24-ჯერ გაგორებისას თუნდაც ერთხელ მოვა წყვილი 6-იანი„***, ხოლო B არის ასეთი ხდომილება: B =***"ოთხი კამათლის ერთხელ გაგორებისას მოვა ერთი 6-იანი მაინც".*** A ხდომილების საწინააღმდეგო ხდომილება ასეთია: $\bar{A}$ =***„კამათლის წყვილის 24-ჯერ გაგორებისას ერთხელაც არ მოვა 6-იანების წყვილი"***. $\overline{A_i}$ -ით ავღნიშნოთ ხდომილება: ***„ i -ური გაგორებისას არ მოვა 6-იანების წყვილი"***. ცხადია რომ $\bar{A}$ ხდომილება არის $\overline{A_i}$ ხდომილებების ნამრავლი, ხოლო ეს ხდომილებები დამოუკიდებელია. აქედან გამომდინარე, გვაქვს

$$P(\bar{A}) = P(\overline{A_1 A_2} \cdots \overline{A_{24}}) = P(\overline{A_1}) P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_{24}}).$$

ასევე ცხადია, რომ $P(\overline{A_1}) = (\overline{A_2}) = \cdots = P(\overline{A_{24}})$. ამიტომ შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$P(\bar{A}) = P(\overline{A_1})^{24}.$$

გამოვთვალოთ ალბათობა $P(\overline{A_1})$. ცხადია რომ კამათლის წყვილის აგდებისას ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ელემენტების რაოდენობა ტოლია 36-ის. ამ ხდომილებებს შორის ისეთების რაოდენობა, რომლებშიც არ მოვიდა 6-იანების წყვილი არის 35-ის ტოლი. ე.ი. შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$P(\overline{A_1}) = \frac{35}{36} \Longrightarrow P(\bar{A}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}.$$

ამიტომ, შევალიე დე მერეს წარმატების ალბათობა იქნება

$$P(A) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.491404.$$

ახლა გამოვთვალოთ დე მერეს მოწინააღმდეგის წარმატების ალბათობა. ცხადია, რომ B ხდომილების საწინააღმდეგო ხდომილება არის $\bar{B}$ = ***"4 კამათლის გაგორებისას ერთი 6-იანიც კი არ მოვიდა"***. დავუშვათ $\overline{B_i}$ არის ხდომილება - ***„i-ურ კამათელზე არ მოვიდა 6-იანი"***. ცხადია, რომ $\bar{B}$ ხდომილება არის ამ ხდომილებების ნამრავლი და ეს ხდომილებები კი ურთიერთდამოუკიდებელი ხდომილებებია. ამიტომ გვექნება

$$P(\bar{B}) = P(\overline{B_1}) \cdot P(\overline{B_2}) \cdot P(\overline{B_3}) \cdot P(\overline{B_4}).$$

ამასთან ეს ხდომილებები თანაბრად შესაძლებელია. ე.ი., შეგვიძლია დავწეროთ

$$P(\bar{B}) = P(\overline{B_1})^4.$$

ახლა გამოვთვალოთ $P(\overline{B_1})$. ცხადია რომ კამათლის გაგორებისას ელემენტარული ხდომილებების სივრცის ელემენტების რაოდენობა 6-ის ტოლია, ხოლო 6-იანის არ მოსვლის შემთხვევების რაოდენობა ტოლია 5-ის. ამიტომ გვექნება

$$P(\overline{B_1}) = \frac{5}{6} \Rightarrow P(\bar{B}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4.$$

ასე რომ დე მერეს მოწინააღმდეგის წარმატების ალბათობა იქნება

$$P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.517747.$$

ამრიგად აღმოჩნდა რომ $P(A) < P(B)$, რაც იმას ნიშნავდა რომ პრაქტიკაში მიღებული შედეგი, რომელმაც დე მერეს გაკვირვება გამოიწვია, სრულ შესაბამისობაში იყო თეორიასთან, რაც მეცნიერულად დასაბუთდა.

ვინ დაიხურავს საკუთარ ქუდს?

ცივი ზამთრის ერთ საღამოს მონადირეთა საზოგადოების წევრები შეიკრიბნენ ქალაქგარეთ გასული სეზონის შესახებ მსჯელობის მიზნით. შეკრების ადგილას საკმაოდ ციოდა რის გამოც მონაწილეები შენობაში ქურქით შედიოდნენ, მაგრამ ქუდებს შესასვლელში ტოვებდნენ. შეკრება დაღამებამდე გაგრძელდა და უკვე მთავრდებოდა როდესაც შენობაში სინათლე ჩაქრა. მონადირეებმა დაშლა დაიწყეს, მაგრამ სიბნელეში საკუთარი ქუდების მოძებნა შეუძლებელი იყო. მათ გადაწყვიტეს არ დაეკარგათ დრო საკუთარი ქუდების ძებნაში და თითოეულ მათგანს დეხურა პირველივე ქუდი რომელიც მას ხელთ მოხვდებოდა. ქუდებს გაცვლიდნენ როდესაც მომდევნო დღეებში კვლავ შეხვდებოდნენ ერთმანეთს. ამას ყველა დაეთანხმა, ხოლო ერთმა მათგანმა ხუმრობით დააიმედა კოლეგები: „თითქმის დარწმუნებული ვარ რომ რომელიმე ჩვენგანს საკუთარი ქუდი შეხვდება“. მოდი გავარკვიოთ რამდენად საფუძვლიანია ამ მონაწილის ვარაუდი.

პირველ რიგში გადავნომროთ შეკრების მონაწილეები: $1, 2, 3, \dots, n$. დავუშვათ A_i არის ხდომილება - „შეკრების i-ურმა მონაწილემ დაიხურა საკუთარი ქუდი“. ხდომილება

$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$, რომელიც სიტყვიერად ასე ჩამოყალიბდება: „შეკრების ერთმა მონაწილემ მაინც საკუთარი ქუდი დაიხურა“, არის სწორედ ის ხდომილება, რომლის ალბათობაც გვაინტერესებს. რადგან $A_1, A_2, \dots, A_n$ ხდომილებები არ არის არათავსებადი ხდომილებები, მათი ჯამის ალბათობის გამოთვლა არც ისე მარტივია. ალბათობათა ჯამის ფორმულის თანახმად გვაქვს ასეთი ტოლობა

$$P(A) = P(A_1) + \cdots + P(A_n) - \big(P(A_1A_2) + \cdots + P(A_{n-1}A_n)\big) + \cdots \pm P(A_1A_2 \cdots A_n).$$

როგორც გვახსოვს, ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი შედგება ნიშანცვლადი ჯამებისაგან, თითოეული შესაკრები არის $A_1, A_2, \dots, A_n$ ხდომილებებიდან რამოდენიმე ხდომილების ნამრავლის ალბათობა და ჯამში შედის დადებითი ნიშნით თუ ნამრავლში მონაწილე ხდომილებების რაოდენობა კენტია და უარყოფითი ნიშნით - როდესაც ხდომილებების რაოდენობა ლუწია. ჯამში მონაწილეობს ამ ხდომილებების ყველა შესაძლო კომბინაცია.

ცხადია რომ როდესაც ხდომილებების რაოდენობები ერთმანეთის ტოლია, შესაბამისი ალბათობებიც ტოლია:

$$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_n);$$

$$P(A_1A_2) = P(A_iA_j);$$

$$P(A_1A_2 \cdots A_k) = P\big(A_{i_1}A_{i_2} \cdots A_{i_k}\big).$$

n ცალი ქუდი n მონაწილეს შორის შეიძლება გადანაწილდეს $n!$ სხვადასხვა ხერხით. თუ რომელიმე ერთ მონაწილეს შეხვდა თავის ქუდი, მაშინ დარჩენილი $n-1$ ცალი ქუდი შეიძლება გადანაწილდეს $(n-1)!$ ხერხით. ამიტომ, გვექნება

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}.$$

თუ რომელიმე ორი მონაწილე დაიხურავს საკუთარ ქუდებს, მაშინ დანარჩენ მონაწილეებს შორის დარჩენილი ქუდები შეიძლება გადანაწილდეს $(n-2)!$ სხვადა-სხვა ხერხით. ამიტომ გვექნება

$$P\big(A_iA_j\big) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

ანალოგიურად შეგვიძლია გავაგრძელოთ სხვა შემთხვევებისთვისაც

$$P\big(A_{i_1}A_{i_2} \cdots A_{i_k}\big) = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}.$$

ამავე დროს, შესაკრებთა წევრების გათვალისწინებით გვექნება

$$P(A_1) + \cdots + P(A_n) = n \cdot \frac{1}{n} = 1;$$

$$P(A_1A_2) + \cdots + P(A_{n-1}A_n) = \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2!};$$

$$P(A_1A_2A_3) + \cdots = \frac{1}{3!};$$

$$\ldots$$

$$P(A_1A_2 \cdots A_n) = \frac{1}{n!}.$$

ამ ტოლობების გამოყენებით, A ხდომილების ალბათობა n მონაწილის შემთხვევაში იქნება

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

ამ ფორმულის გამოყენებით გამოთვლის შედეგად აღმოჩნდება რომ ალბათობებს აქვს დაახლოებით ასეთი მნიშვნელობები

n	3	4	5	6	7	100
$P(A)$	0.66667	0.62500	0.63333	0.63196	0.63214	0.63212

საინტერესოა, რომ რომელიმე მონაწილის მიერ საკუთარი ქუდის დახურვის ალბათობა 3 მონაწილის შემთხვევაში თითქმის იგივეა რაც 100 მონაწილის შემთხვევაში და დაახლოებით $\frac{2}{3}$-ის ტოლია. ამიტომ, შეიძლება ითქვას რომ იმ მონაწილის ნათქვამი რომელმაც ივარაუდა რომ ერთი ქუდი მაინც შეხვდებოდა პატრონს, სიმართლესთან საკმაოდ ახლოსაა.

მეტეოროლოგიური პარადოქსი

ერთი მეტეოროლოგიური სადგურის ამინდის პროგნოზი მართლდება 10-დან 9 შემთხვევაში, მეორე სადგურის პროგნოზი მართლდება 10-დან 8 შემთხვევაში.

უახლოეს კვირა დღეს პირველი სადგური წინასწარმეტყველებს ავდარს. ეს ხდომილება ავღნიშნოთ R-ით. მეორე სადგური კვირისათვის წინასწარმეტყველებს $\bar{R}$-ს - დარს. ამ შემთხვევაში, ერთი შეხედვით, ვღებულობთ წინააღმდეგობას: $R+\bar{R}$ არის აუცილებელი ხდომილება, რის გამოც მისი ალბათობა უნდა იყოს 1-ის ტოლი, მაგრამ რადგან ეს ორი ხდომილება არათავსებადია, ამიტომ ჯამის ფორმულის მიხედვით გვაქვს: $1=P(R+\bar{R})=P(R)+P(\bar{R})=0.9+0.8=1.7$, რაც შეუძლებელია. ამ პარადოქსის გარკვევაში დაგვეხმარება ხდომილების საკითხის დაზუსტება. ამ შემთხვევაში გვაქვს არა მხოლოდ ორი ხდომილება - R=***"კვირას ავდარი იქნება"*** და $\bar{R}$ =***"კვირას დარი იქნება"***, არამედ გვაქვს კიდევ ორი ხდომილება - A =***"პირველი მეტეოსადგურის პროგნოზი სწორია"*** და B =***"მეორე მეტეოსადგურის პროგნოზი სწორია"***. ეს უკანასკნელი ორი ხდომილება სულაც არაა არათავსებადი, რის გამოც ტოლობა $P(A+B)=P(A)+P(B)$ მცდარია. ასევე მცდარია ისიც რომ ჩვენ ერთმანეთთან გავაიგივეთ R და A ხდომილებები და $\bar{R}$ და B ხდომილებები.

მძარცველის დაკავება

ოპერატიულ-სამძებრო განყოფილებაში შემოვიდა შეტყობინება, რომ 5-მა ბოროტმოქმედმა სოფლის მაღაზიიდან გაიტაცა ნავაჭრი თანხა. თვითმხილველებმა შეამჩნიეს, რომ 5 უცნობი ჩაჯდა ავტობუსში, რომელიც ქალაქში მიდიოდა. ეს ინფორმაცია მიაწოდეს მეზობელი სოფლის პოლიციის განყოფილებაში. პოლიციის ინსპექტორმა, რომელსაც ქურდების დაკავება დაავალეს, ჩხრეკის ნებართვა მოითხოვა. მას განუცხადეს, რომ ავტობუსში 40 მგზავრია და ყველა მათგანის გაჩხრეკა მაინცდამაინც მისაღები არ იქნებოდა. „მე მხოლოდ 6 მგზავრის შემოწმება დამჭირდება“, განაცხადა ინსპექტორმა. რისი იმედი ქონდა მას? რამდენად შესაძლებელია დამნაშავის დადგენა 40 ადამიანიდან მხოლოდ 6-ის შემოწმებით? ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად მივმართოთ ალბათობის თეორიას.

დამნაშავეების მოძებნის საკითხს მოგვიანებით მივუბრუნდებით. მანამდე განვიხილოთ ასეთი ამოცანა:

ვთქვათ ყუთში გვაქვს n ცალი ბურთულა, რომელთა შორის m თეთრია, ხოლო დანარჩენი - შავი. რისი ტოლია იმის ალბათობა, რომ შემთხვევით ამოღებულ r ბურთულას შორის აღმოჩნდება k ცალი თეთრი?

თუ r ბურთულასს შორის k ცალი თეთრია, მაშინ შავი ბურთების რაოდენობა იქნება $r-k$. რადგან ყუთში თეთრი ბურთების რაოდენობა m-ის ტოლია, ამიტომ მათგან k

ცალი თეთრის ამოღება შესაძლებელია C_m^k ხერხით. შესაბამისად, $n-m$ ცალი შავი ბურთულიდან $r-k$ ცალი შავის ამოღება შესაძლებელია C_{n-m}^{r-k} განსხვავებული ხერხით. აქედან გამომდინარე, იმ ხელშემწყობ ხდომილებათა რაოდენობა არის $C_m^k \cdot C_{n-m}^{r-k}$. რადგან n ელემენტიანი სიმრავლიდან r ელემენტიანი ქვესიმრავლის ამორჩევა შესაძლებელია C_n^r ხერხით, ამიტომ ალბათობის კლასიკური განსაზღვრების თანახმად გვაქვს

$$P(r \text{ ბურთს შორის } k \text{ თეთრია}) = \frac{C_m^k \cdot C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r}.$$

ამ ტოლობას ჰიპერგეომეტრიული განაწილების ფორმულა ეწოდება. იგი შეიძლება გამოვიყენოთ იმისათვის რომ დავადგინოთ თუ რამდენად რეალისტურია ინსპექტორის განცხადება.

ამ შემთხვევაში ხდომილება არის

$$A - \text{"შემთხვევით შერჩეულ } 6 \text{ მგზავრს შორის ერთი მაინც მძარცველია"}.$$

გვაქვს ასეთი ხდომილებები:

$$A_i - \text{"}6 \text{ შემთხვევით მგზავრს შორის მძარცველების რაოდენობა } i - \text{სტოლია."}$$

სადაც $i = 1, 2, 3, 4, 5.$

ცხადია, რომ $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$. ამ ჯამში შემავალი ხდომილებები არათავსებადია. ამიტომ გვაქვს

$$P(A) = A(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5).$$

ზემოთ მიღებული ფორმულის გამოყენებით გვექნება[1]

$$P(A_1) = \frac{C_5^1 \cdot C_{35}^5}{C_{40}^6} \approx 0.422876,$$

$$P(A_2) = \frac{C_5^2 \cdot C_{35}^4}{C_{40}^6} \approx 0.136412,$$

$$P(A_3) = \frac{C_5^3 \cdot C_{35}^3}{C_{40}^6} \approx 0.0170515,$$

[1] გამოთვლები შესრულებულია მათემატიკური პროგრამული პაკეტის ***Wolfram Mathematica*** - ს გამოყენებით

$$P(A_4) = \frac{C_5^4 \cdot C_{35}^2}{C_{40}^6} \approx \ 0.000775,$$

$$P(A_5) = \frac{C_5^5 \cdot C_{35}^1}{C_{40}^6} \approx 0.00001.$$

ამ შედეგების გამოყენებით გვექნება $P(A) \approx \ 0.577124$.

როგორც მიღებული შედეგიდან ჩანს, შემთხვევით შერჩეულ 6 მგზავრს შორის მძარცველის აღმოჩენის ალბათობა მნიშვნელოვნად აღემატება 50%-ს.

ამ ამოცანის ამოხსნა შესაძლებელია უფრო მარტივი ხერხით, თუმცა მისი გამოყენებისას საშუალება არ გვექნებოდა, რომ ჰიპერგეომეტრიული განაწილების ცნებას შევხებოდით. კერძოდ, ეს მარტივი ხერხი ასეთია. A ხდომილების საწინააღმდეგო ხდომილებაა

$$\bar{A} = \text{"}\textit{შემთხვევით შერჩეულ } 6 \textit{ მგზავრს შორის მძარცველი არ არის.}\text{"}$$

ცხადია, რომ ამ ხდომილების შესაბამისი ვარიანტების რაოდენობა ტოლია $C_{40-5}^6 = C_{35}^6$. ხოლო მთელი ხდომილებათა სივრცის ელემენტების რაოდენობაა C_{40}^6. ამიტომ $\bar{A}$-ის ალბათობა იქნება $P(\bar{A}) = C_{35}^6 / C_{40}^6$, ხოლო A-ს ალბათობა იქნება $1 - P(\bar{A}) = 1 - C_{35}^6 / C_{40}^6$. გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ ეს სიდიდე მიახლოებით ასევე 0.577124-ის ტოლია.

როგორც ჩანს, საჭიროების შემთხვევაში ინსპექტორს შეეძლო ალბათობის თეორიის გამოყენება.

ბოლოს შევნიშნავთ, რომ ჰიპერგეომეტრიული განაწილება წარმატებით გამოიყენება სხვადასხვა პრაქტიკულ ამოცანებში. მაგალითად: ხარისხის კონტროლისას, ინფექციის გავრცელების კვლევისას. ე.ი ისეთ ვითარებებში, როდესაც მცირე მოცულობის პოპულაციის შერჩევით საჭიროა მთლიანი პოპულაციის შესახებ დასკვნების ჩამოყალიბება.