ზაქარია გიუნაშვილი

მათემატიკისა და ფიზიკის ინტეგრაციის კიდევ ერთი მაგალითი: ფიზიკის გამოყენება მათემატიკური ამოცანების ამოხსნისას

შესავალი

ცნობილ უნგრელ მათემატიკოსს ჯორჯ პოიას (რომელიც მეცნიერულ კვლევებთან ერთად ბევრ დროს უთმობდა მათემატიკური განათლების საკითხებსაც) ასეთი რამ უთქვამს: *„მათემატიკა არის ცხადი რაღაცების დამტკიცება ყველაზე უფრო გაუგებარი ხერხებით“*. მაგრამ მასვე ეკუთვნის სიტყვები: *„ერთ-ერთი უდიდესი მათემატიკური აღმოჩენა განხორციელდა ფიზიკურ ინტუიციაზე დაყრდნობით“* (იგულისხმება არქიმედეს მიერ ინტეგრალური აღრიცხვის აღმოჩენა). შეიძლება ითქვას, რომ მათემატიკისადმი ფიზიკური მიდგომა უხსოვარი დროიდან იღებს სათავეს. ჯერ კიდევ არქიმედე ითვლიდა სივრცული ფიგურების (ცილინდრის, სფეროს, კონუსის) მოცულობებს წარმოსახვითი სასწორის გამოყენებით, ნიუტონი კი ამ ორ დისციპლინას, მათემატიკას და ფიზიკას, ერთმანეთისგან არ განასხვავებდა. უამრავ ფუნდამენტურ მათემატიკურ აღმოჩენას საფუძვლად დაედო ფიზიკური მოსაზრებები. არსებობს თუ არა საყოველთაო რეცეპტი, რომლითაც შესაძლებელია მათემატიკური ამოცანის ამოსახსნელად საჭირო ფიზიკური მოდელის მოფიქრება? ისევე როგორც ნებისმიერი სხვა მეთოდის შემთხვევაში, აქაც შეიძლება ითქვას, რომ უნივერსალური რეცეპტი არ არსებობს - ზოგიერთი ამოცანისთვის ფიზიკური მოდელის მოფიქრება შესაძლებელია და მისი გამოყენებით ამოცანა მარტივად იხსნება, ხოლო ზოგიერთისთვის ეს არც ისე ადვილია. ამ შემთხვევაში მთავარი მიზანია არა მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის კიდევ ერთი ინსტრუმენტის შესაძლებლობათა დემონსტრირება, არამედ *სასწავლო დისციპლინებს შორის კავშირის* წარმოჩენის კიდევ ერთი შესაძლებლობის მიმოხილვა.

მათემატიკური სიმკაცრე და აქსიომური მიდგომა

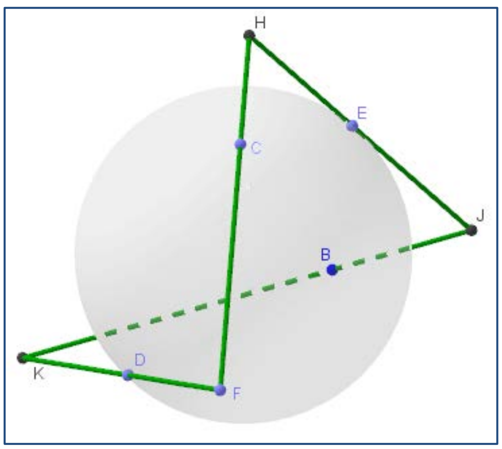
მსჯელობა, რომელიც ფიზიკურ მოსაზრებებს ეყრდნობა, მათემატიკურ სიმკაცრეს მოკლებულია. აქედან გამომდინარე, ამგვარ დასაბუთებას შეუძლებელია ეწოდოს *დამტკიცება* (იმ მნიშნელობით, რომლითაც გამოიყენება ეს სიტყვა მათემატიკაში). ამიტომ შესაძლოა, უფრო მიზანშეწონილი იყოს, ამ სახის მსჯელობას ეწოდოს *დასაბუთება.* ასევე გასათვალისწინებელია ამ მეთოდის მნიშვნელობა იქ, სადაც საქმე ჰიპოთეზის ჩამოყალიბებას ეხება. როდესაც ფიზიკურ მოსაზრებებსა და ინტუიციაზე დაყრდნობით ხდება მათემატიკური შინაარსის დებულების დასაბუთება, ეს შეიძლება განვიხილოთ როგორც ჰიპოთეზა, რომელიც ყველაზე ახლოსაა ჭეშმარიტებასთან. ამის შემდეგ შეიძლება დაისვას ამ ჰიპოთეზის მკაცრი მათემატიკური დამტკიცების საკითხი. თუმცა ეს ყოველთვის არ არის აუცილებელი. უფრო მნიშვნელოვანია იმ *ინტუიციისა და უნარის* განვითარება, რომელიც საჭიროა მათემატიკური ამოცანის ადეკვატური ფიზიკური მოდელის მოსაფიქრებლად, ეს კი, თავის მხრივ, ხელს შეუწყობს *შემოქმედებითობის* განვითარებას.

ცნობილია, რომ მათემატიკური ფაქტები არის დებულებები, რომლებიც ლოგიკური მსჯელობით სასრული რაოდენობის აქსიომებისგან გამომდინარეობს. ამის საპირისპიროდ, ფიზიკურ მოსაზრებებზე დაფუძნებული დასაბუთება არ ეყრდნობა მხოლოდ მათემატიკის აქსიომებს. მიუხედავად ამისა, საინტერესო იქნებოდა იმ „ფიზიკური აქსიომების“ ჩამოყალიბება, რომლებსაც შეიძლება დაეყრდნოს მათემატიკური ფაქტების დასაბუთება ფიზიკური მოდელის გამოყენებით.

ქვემოთ განვიხილავთ რამდენიმე მაგალითს, რომლებშიც ფიზიკური მოდელები და მათთან დაკავშირებული მსჯელობა გამოიყენება მათემატიკური ამოცანების ამოხსნისას.

მაგალითი 1: სფეროზე შემოხაზული ოთხკუთხედი

მოცემულია სივრცული ოთხკუთხედი, რომლის გვერდები ეხება სფეროს. დაასაბუთეთ, რომ ამ სფეროსთან ოთხკუთხედის გვერდების შეხების წერტილები ერთ სიბრტყეში მდებარეობს.



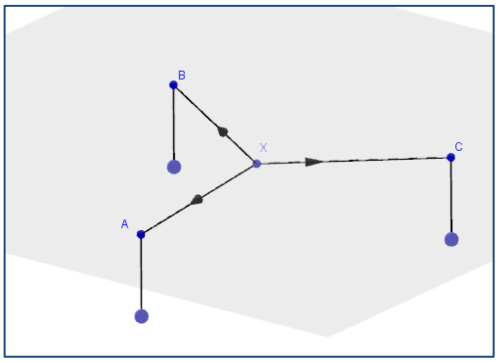
ამ ამოცანის ამოხსნის უმარტივესი გზა ეფუძნება ბარიცენტრის (სიმძიმის ცენტრის, მასათა ცენტრის) ცნებას. იდეა იმაში მდგომარეობს, რომ გამოვიყენოთ სიმძიმის ცენტრის ერთ-ერთი ძირითადი თვისება: მატერიალური წერტილების სისტემის სიმძიმის ცენტრი არ შეიცვლება, თუ ამ სისტემის წერტილების ნებისმიერ ქვესიმრავლეს შევცვლით ამ ქვესიმრავლის სიმძიმის ცენტრით.

ამ სივრცული ოთხკუთხედის თითოეულ წვეროში მოვათავსოთ მასა ისე, რომ ოთხკუთხედის თითოეული გვერდის სიმძიმის ცენტრი ამ გვერდისა და სფეროს შეხების წერტილში მოხვდეს. ამის გაკეთება შესაძლებელია იმიტომ, რომ ოთხკუთხედის თითოეული წვეროდან ამ წვეროდან გამომავალი გვერდების სფეროსთან შეხების წერტილებამდე მანძილები ერთმანეთის ტოლია. თითოეულ წვეროში შეგვიძლია განვათავსოთ მასა, რომელიც ტოლია ამ წვეროდან შესაბამის შეხების წერტილამდე მანძილის შებრუნებულისა. მთელი სისტემის სიმძიმის ცენტრი, რომელიც ერთადერთია, მდებარეობს ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების სიმძიმის ცენტრების (შეხების წერტილების) შემაერთებელ მონაკვეთზე, ამიტომ ეს

მონაკვეთები თანაიკვეთებიან (სწორედ ამ სიმძიმის ცენტრში). აქედან გამომდინარე, სფეროსთან შეხების წერტილები ერთ სიბრტყეში მდებარეობს.

მაგალითი 2: მანძილების ჯამის მინიმიზაცია

სიბრტყეზე მოცემულია 3 წერტილი - A, B და C. იპოვეთ ისეთი X წერტილი, რომლიდანაც ამ სამ წერტილამდე მანძილების ჯამი უმცირესია.



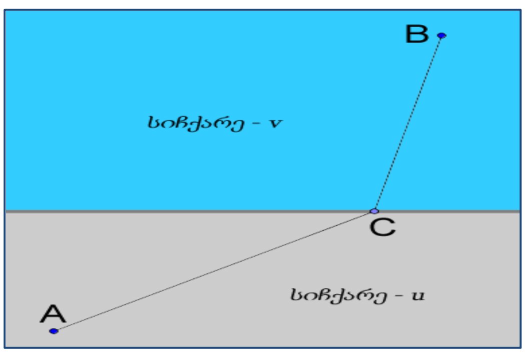
მათემატიკური ამოცანების ფიზიკურ მოსაზრებებზე დაფუძნებული ამოხსნის დროს მთავარ როლს ასრულებს წარმოსახვითი ფიზიკური მოდელი ან ექსპერიმენტი. ე.ი. ამოხსნის მისაღებად არ არის აუცილებელი ამ ფიზიკური მოდელის რეალიზაცია და ექსპერიმენტის შედეგებზე დაკვირვება. საკმარისია წარმოსახვითი მოდელისა და ექსპერიმენტის განხილვა და მისი ანალიზი. ამ შემთხვევაში ეს მოდელი ასეთია: წარმოვიდგინოთ, რომ A, B და C წერტილებში გაკეთებულია ხვრელები და X წერტილში დამაგრებული სამი ერთნაირი ძაფი ამ ხვრელებში გაივლის. ამასთან, ამ ძაფებზე დაკიდებულია ერთეულოვანი მასის მქონე სხეულები. A ხვრელში გატარებული ძაფის პოტენციური ენერგია AX-ის სიგრძის ტოლია. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ X-ის გადასაადგილებლად A-დან მის ახლანდელ პოზიციაში საჭიროა სიმძიმის აწევა ისე, რომ სიმაღლე შეიცვალოს AX-ით. ანალოგიურად, B-ში გატარებული ძაფის პოტენციური ენერგიაა BX-ის სიგრძე, ხოლო C-ში გატარებული ძაფის პოტენციური ენერგია - CX-ის სიგრძე. ე.ი. მთლიანი სისტემის პოტენციური ენერგიაა $XA + XB + XC$. მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ ამ მსჯელობის შედეგად $XA + XB + XC$ ჯამს მიენიჭა ფიზიკური შინაარსი, რასაც შემდგომ ამოცანის ამოხსნისას გამოვიყენებთ. ამის შემდეგ შეიძლება ითქვას, რომ მანძილების ჯამის მინიმალურობა ნიშნავს პოტენციური ენერგიის მინიმალურობას, ხოლო როდესაც სისტემის რომელიღაც მდგომარეობაში პოტენციური ენერგია უმცირესია, სისტემა წონასწორობაში იმყოფება, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ X წერტილზე მოქმედი ძალების ჯამი 0-ის ტოლია. მასზე მოქმედი ძალები სიდიდით ერთმანეთის ტოლია, ამიტომ მათი ჯამის 0-თან ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ შესაბამის ვექტორებს შორის კუთხეები 120^0-ის ტოლია. დასკვნა: $XA + XB + XC$ ჯამი უმცირესია, როდესაც $\angle AXB = \angle BXC = \angle CXA = 120^0$.

ორივე განხილული მაგალითის შემთხვევაში დასმული მათემატიკური ამოცანის ამოხსნა მხოლოდ მათემატიკური აპარატის გამოყენებით საკმაოდ რთულია. როგორც უკვე ითქვა,

მხოლოდ ფიზიკურ მოსაზრებაზე დაყრდნობილი ამოხსნა არ შეიძლება ჩაითვალოს სრულყოფილად. მით უმეტეს მაშინ, როდესაც თვით ფიზიკის კანონი, რომელსაც ვიყენებთ, მოითხოვს არცთუ მარტივ მათემატიკურ აპარატს. მიუხედავად ამისა, როდესაც გვაქვს ჰიპოთეზა, რომლის ჭეშმარიტებაში თითქმის დარწმუნებული ვართ, მისი მკაცრი მათემატიკური დასაბუთება გაცილებით ადვილია.

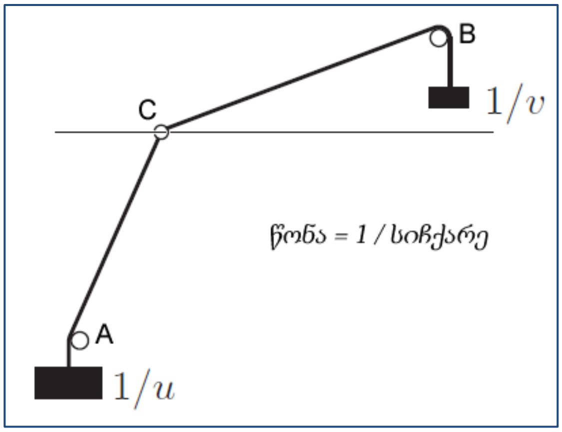
მომდევნო მაგალითი დაკავშირებულია საკმაოდ გავრცელებულ მათემატიკურ ამოცანასთან, რომელშიც საჭიროა ორ წერტილს შორის უსწრაფესი მარშრუტის პოვნა და რომელიც, თავის მხრივ, უკავშირდება ფიზიკაში ცნობილ ფერმას პრინციპს: ორი სინათლის სხივი ერთი წერტილიდან მეორემდე ვრცელდება იმ გზით, რომლის გავლასაც ანდომებს უმცირეს დროს.

მაგალითი 3: მოცურავის გადარჩენა, ფერმას პრინციპი და პოტენციური ენერგიის მინიმიზაცია



მაშველი, რომელიც იმყოფება A წერტილში, ცდილობს გადაარჩინოს მოცურავე, რომელიც წყალში B წერტილში იმყოფება. ხმელეთზე სირბილის დროს მაშველის სიჩქარეა u, ხოლო წყალში იგი ცურავს v სიჩქარით. სწორხაზოვანი ნაპირის რომელ C წერტილში უნდა შევიდეს იგი წყალში, რომ მოცურავემდე მისვლას მოანდომოს უმცირესი დრო?

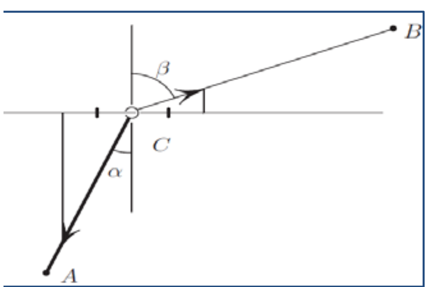
თუ ყურადღებას არ მივაქცევთ ამ ამოცანის წარმოსახვით რეალურ კონტექსტს (მოცურავის გადარჩენა მაშველის მიერ), მასთან დაკავშირებულ აბსტრაქტულ მოდელს საკმაოდ მრავალფეროვანი ფიზიკური შინაარსი აქვს. როგორც აღვნიშნეთ, ერთი მათგანი უკავშირდება ფერმას პრინციპს, ხოლო კიდევ ერთი ფიზიკური მოდელი შეიძლება გამოვიყენოთ ამ ამოცანის ამოხსნის მოსაძებნად. განვიხილოთ ასეთი წარმოსახვითი სისტემა:



რგოლზე (C წერტილი) დამაგრებულია ორი ერთნაირი სიმი. თვით ამ რგოლში გატარებულია ღერძი (ამოცანის კონტექსტში ეს არის ნაპირის ხაზი). რგოლს შეუძლია ამ ღერძის გასწვრივ თავისუფლად სრიალი. თითოეული სიმის მეორე ბოლოზე დაკიდებულია ტვირთი. A წერტილში გადადებული სიმის ბოლოზე დაკიდებული ტვირთის წონაა $1/u$, ხოლო B წერტილში გადადებული სიმის ბოლოზე დაკიდებული ტვირთის წონა - $1/v$. ეს სისტემა C წერტილის გადაადგილების შედეგად გადავა წონასწორობის მდგომარეობაში. წინა მაგალითის ანალოგიურად, ასეთი სისტემის პოტენციური ენერგია მოიცემა გამოსახულებით

$$AC \cdot \frac{1}{u} + BC \cdot \frac{1}{v}.$$

ეს გამოსახულება კი ემთხვევა დროს, რომელიც მაშველს სჭირდება A წერტილიდან B წერტილში გადასაადგილებლად. მისი მინიმუმი კი სწორედ იმას ნიშნავს, რომ სისტემა წონასწორობაში იმყოფება.



სისტემის წონასწორობის კიდევ ერთი პირობაა C-ზე მოქმედი ძალების ვექტორული ჯამის ნულთან ტოლობა, რაც მათემატიკურად გამოისახება

$$\frac{1}{u} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{v} \cdot \sin\beta$$

ტოლობით.

რა თქმა უნდა, ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს უკანასკნელი ტოლობა თანხმობაშია სნელის კანონთან, რომელიც, თავის მხრივ, ფერმას პრინციპიდან გამომდინარეობს.

როგორც ვხედავთ, ხშირად საკმაოდ მარტივი შინაარსის მქონე მათემატიკურმა ამოცანამ შეიძლება შეიძინოს მრავალფეროვანი ფიზიკური თუ რეალური კონტექსტი, რაც სასწავლო მასალას უფრო საინტერესოს გახდის და ამავე დროს ხელს შეუწყობს სასწავლო დისციპლინებს შორის კავშირსა და ინტეგრაციას.

გამოყენებული ლიტერატურა და რესურსები:

1. R. P. Feynman. QED. The Strange Theory of Light and Matter. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1985

2. M. Levi. The Mathematical Mechanics. Using Physical Reasoning to Solve Problems. Princeton University Press, 2009

3. V.A. Uspenski. Some Applications of Mechanics to Mathematics. New York: Pergamon Press, 1966

4. Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles. http://www.cut-the-knot.org/

5. Tanya Khovanova, Alexey Radul. Jewish Problems. http://arxiv.org/abs/1110.1556, http://www.tanyakhovanova.com/Coffins/coffinsmain.html