

ზაქარია გიუნაშვილი

მსჯელობა-დასაბუთების უნარი - მათემატიკის სწავლების ერთ-ერთი მთავარი მიზანი

დამტკიცების პედაგოგიური დანიშნულება მათემატიკაში

მსჯელობა-დასაბუთებას მათემატიკაში ყოველთვის ერთ-ერთი ძირითადი ადგილი ეკავა. მათემატიკური შინაარსის ტექსტებში ამ პროცესს **დამტკიცება** ეწოდება. განსხვავება მათ შორის შეიძლება მხოლოდ ის იყოს, რომ ეს უკანასკნელი უფრო მეტადაა ფორმალიზებული - დამტკიცების პროცესის თითოეული საფეხური უნდა აკმაყოფილებდეს ფორმალური ლოგიკის მკაცრ მოთხოვნებს. დასაბუთების დროს მსჯელობა ნაკლებად ფორმალურია, თუმცა ეს არ ნიშნავს იმას, რომ მასში დასაშვებია უზუსტობები და მცდარი გამონათქვამები. დასაბუთების დროს მიღებულია ნაკლები დეტალიზაცია და ზოგიერთი წარმოდგენილი არგუმენტის სიცხადეზე დაყრდნობა. ამ შემთხვევაში იგულისხმება, რომ საჭიროების შემთხვევაში ავტორს შეუძლია უფრო დეტალური არგუმენტების წარმოდგენა. შეიძლება ითქვას, რომ ზუსტი საზღვარი ამ ორ პროცედურას (დასაბუთებასა და დამტკიცებას) შორის არ არსებობს - ნებისმიერი დეტალური დამტკიცება, სურვილის შემთხვევაში, შესაძლებელია კიდევ უფრო დეტალური გაგხადოთ. ამავე დროს, ნებისმიერ შემთხვევაში, მსჯელობა არ უნდა ეწინააღმდეგებოდეს ფორმალური ლოგიკის კანონებს (მაგ., **„ჩემპიონები სვამენ კოკა-კოლას!“**. შეფარული მინიშნება, რომელიც ლოგიკურად მცდარია - **„დალიე კოკა-კოლა თუ გსურს, რომ ჩემპიონი იყო!“**). ფორმალური ლოგიკა, როგორც მათემატიკის ერთ-ერთი მიმართულება, არ წარმოადგენს სასკოლო მათემატიკის შემადგენელ ნაწილს. მიუხედავად ამისა, მსჯელობა-დასაბუთების უნარის განვითარება მათემატიკის სწავლების ძირითადი მიზანია: (მოსწავლე) **გადმოცემისას სწორად და ეფექტიანად იყენებს მათემატიკურ ტერმინებსა და აღნიშვნებს. ადეკვატურად ირჩევს სიმკაცრის დონეს და როდესაც საჭიროა, დასაბუთებისას იყენებს მკაცრ მათემატიკურ მსჯელობას (მათ შორის ინდუქციურ და დედუქციურ მსჯელობას)** - ამონარიდი ეროვნული სასწავლო გეგმის მათემატიკის საგნობრივი პროგრამიდან.

სასკოლო მათემატიკაში ხშირად გვხვდება ისეთი აქტივობები, რომლის დროსაც დასმული ამოცანის ამოხსნა შესაძლებელია მხოლოდ წინასწარ განსაზღვრული მკაფიოდ ჩამოყალიბებული პროცედურების მიმდევრობის საშუალებით (მაგალითად: ზოგიერთი განტოლების ამოხსნა, როდესაც წინასწარაა ცნობილი განტოლების ამოხსნის ხერხი; ალგებრული გამოსახულების გამარტივება; ტექსტური ამოცანის ამოხსნა განტოლების შედგენით). ტრადიციული სასკოლო მათემატიკის

კურსის დიდი ნაწილი სწორედ ამ სახის აქტივობებს ეთმობა. განსხვავებით ამისაგან, მათემატიკური შინაარსის დებულების დამტკიცება, როგორც წესი, არ არის ალგორითმული პროცედურა, რომელიც ფორმალური ლოგიკის წესების მექანიკური გამოყენებით იძლევა შედეგს. დამტკიცების ერთ-ერთი ძირითადი დანიშნულება არის გამონათქვამის ჭეშმარიტობის დემონსტრირება, თუმცა დამტკიცების როლი ამით არ ამოიწურება. გარდა შედეგის დასაბუთების და დადასტურებისა, დამტკიცებას გააჩნია ერთი მნიშვნელოვანი, პედაგოგიური დანიშნულება: დამტკიცება არის ფაქტის ღრმად გააზრების საშუალება. აქედან გამომდინარე, დამტკიცების პროცედურა, გარდა ფორმალურ-ლოგიკური მსჯელობისა, იყენებს უამრავ სხვადასხვა საშუალებას იმისათვის, რომ რაც შეიძლება თვალსაჩინო გახდეს დასკვნის ჭეშმარიტება. უფრო მეტიც, შეიძლება ითქვას, რომ **მხოლოდ** ფორმალური მსჯელობა ზოგჯერ ხელსაც კი უშლის შედეგის ბოლომდე გააზრებას. ამიტომ, ამ უნარის განვითარება გულისხმობს იმას, რომ ძირითადი პედაგოგიური მიზანი უნდა იყოს დასაბუთების **მრავალფეროვანი** საშუალებების გამოყენება. ეს მრავალფეროვნება, რა თქმა უნდა, მოიცავს ლოგიკურ მსჯელობას, ნახაზების, გრაფიკების, დიაგრამების გამოყენებას და უფრო მეტიც, ზოგიერთ შემთხვევებში ელექტრონული რესურსების გამოყენებასაც კი.

რომ შევაჯამოთ, შეიძლება ვთქვათ, რომ მათემატიკის სასკოლო კურსში, დასაბუთებას და დამტკიცებას, გარდა წმინდა მათემატიკური დანიშნულებისა, რომელიც გულისხმობს ამა თუ იმ მიგნების, დასკვნის, თუ დებულების ჭეშმარიტებაში დარწმუნებისა, აქვს ორი პედაგოგიური დანიშნულება:

- მსჯელობა-დასაბუთების უნარის განვითარება, რაც თავისთავად ზოგადად კომუნიკაციის უნარის ერთ-ერთი შემადგენელი ნაწილია. იგი გულისხმობს არა მხოლოდ ზეპირსიტყვიერ და წერილობით მსჯელობას არამედ დასაბუთების მრავალფეროვანი ხერხებისა და საშუალებების გამოყენებას;
- შინაარსის ღრმა გააზრება და რამოდენიმე სხვადასხვა კუთხით დანახვა. მისი დაკავშირება სხვა ფაქტებსა და სტრუქტურებთან.

ყოველდღიურ ცხოვრებაში სიტყვა **დამტკიცება** ბევრს სხვადასხვა რამეს შეიძლება ნიშნავდეს. მაგალითად, ფარმაცევტულმა კომპანიამ შეიძლება „დამტკიცოს“, რომ რომელიღაც წამალს არ გააჩნია გვერდითი ეფექტი. ეს დამტკიცება ამ შემთხვევაში შეიძლება ეფუძნებოდეს წამლის გამოცდას მოხალისეებზე ან მისი გამოყენების შედეგებზე დაკვირვებას დროის ხანგრძლივ პერიოდში. სასამართლოში შეიძლება „დამტკიცდეს“ განსასჯელის დანაშაული ან უდანაშაულობა საკმარისი ან არასაკმარისი სამხილების საფუძველზე. ნებისმიერ ასეთ შემთხვევაში, „დამტკიცება“ ეფუძ-

ნება დაკვირვებებს. სიტყვა „დამტკიცება“ მათემატიკაში, სრულიად განსხვავებული მნიშვნელობის მატარებელია. მათემატიკური დამტკიცება შედგება ლოგიკური არგუმენტაციისაგან, რომელიც ეფუძნება მკაფიოდ ჩამოყალიბებულ წანამდგრებს. იგი არ არის დამოკიდებული დასამტკიცებელი დებულების სასარგებლო სტატისტიკური მონაცემების რაოდენობაზე, პირად მოსაზრებებზე ან ავტორიტეტულ აზრზე.

როგორც წესი, სწავლების დაწყებით საფეხურზე მსჯელობა-დასაბუთებას ნაკლები ყურადღება ექცევა და ძირითადი აქცენტი გადატანილია ისეთი კომპეტენციების განვითარებაზე, როგორებიცაა: გამოთვლები და ალგებრული გარდაქმნები, ფიგურების ზომების და თვისებების დადგენის ხერხები. თუმცა, ლოგიკის წესების გათვალისწინება ნებისმიერი მათემატიკური ამოცანის ამოხსნისას იგულისხმება. მსჯელობა-დასაბუთების უშუალო მოთხოვნა და ამ კომპეტენციის განვითარებაზე ზრუნვა იწყება საბაზო საფეხურიდან.

დამტკიცების ხერხები

მათემატიკაში არსებობს დამტკიცების სხვადასხვა ხერხი. სასკოლო მათემატიკაში, დამტკიცების ყველაზე გავრცელებული ხერხებია: პირდაპირი დამტკიცება, ამოწურვის (გადარჩევის) მეთოდით დამტკიცება, დამტკიცება საწინააღმდეგოს დაშვებით, არსებობის დამტკიცება, დამტკიცება მათემატიკური ინდუქციით.

პირდაპირი დამტკიცება არის გამონათქვამების მიმდევრობა, რომელშიც ყოველი მომდევნო გამონათქვამი ლოგიკურად გამომდინარეობს წინა გამონათქვამიდან. დამტკიცების ამ ხერხის გამოყენების დროს, გამონათქვამების მიმდევრობა შეიძლება შედგებოდეს, როგორც წანამდგარისაგან, ასევე სხვა დამხმარე დებულებებისაგან, რომლებიც ასევე ჭეშმარიტია. როგორც წესი, პირდაპირი დამტკიცების პროცედურა შეიძლება ჩაიწეროს როგორც იმპლიკაციების მიმდევრობა:

თეორემა: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

დამტკიცება:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2 + \dots + n \Rightarrow x = n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 \Rightarrow x + x \\ &= \underbrace{(n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1)}_n \Rightarrow 2x = n(n + 1) \Rightarrow x \\ &= \frac{n(n + 1)}{2}. \blacksquare \end{aligned}$$

ამოწურვის (გადარჩევის) მეთოდით დამტკიცების დროს ხდება ყველა შესაძლო შემთხვევის განხილვა. მათემატიკურ ენაზე ეს იმას ნიშნავს, რომ როდესაც საჭიროა იმის დასაბუთება რომ რომელიღაც სიმრავლის ელემენტებს გააჩნია რომელიღაც თვისება, ხდება ამ სიმრავლის თითოეული ელემენტის შემოწმება იმაში დასარწმუნებლად, რომ მათ გააჩნია ეს თვისება. მაგალითად, გვაქვს ასეთი თეორემა:

არ არსებობს ისეთი ორნიშნა ნატურალური რიცხვი, რომელიც საკუთარი ციფრების კვადრატების ჯამის ტოლია.

ამ თეორემის დამტკიცება შესაძლებელია ამოწურვის მეთოდით. ამისათვის უნდა შევამოწმოთ ყველა ნატურალური რიცხვი 11-დან 99-ის ჩათვლით, რომ დავრწმუნდეთ იმაში, რომ მათი ციფრების კვადრატების ჯამი არ არის ტოლი ამ რიცხვების. ამოწურვის მეთოდის გამოყენების დროს შესაძლებელია შესამოწმებელი ელემენტების რაოდენობა იყოს საკმაოდ დიდი (როგორც ამ მაგალითში). ასეთ შემთხვევაში შესაძლებელია გამოვიყენოთ ტექნოლოგიები. მაგალითად, ელექტრონული ცხრილი

რიცხვი	C	D	E	F	G
				ციფრების კვადრატების ჯამი	ტოლია?
11	1	1		2	FALSE
12	2	1		5	FALSE
13	3	1		10	FALSE
14	4	1		17	FALSE
15	5	1		26	FALSE
16	6	1		37	FALSE
17	7	1		50	FALSE
18	8	1		65	FALSE
19	9	1		82	FALSE
20	0	2		4	FALSE
21	1	2		5	FALSE
22	2	2		8	FALSE
23	3	2		13	FALSE
24	4	2		20	FALSE

თავისთავად ტექნოლოგიების გამოყენება მათემატიკური გამონათქვამების დამტკიცებისას მოითხოვს სიფრთხილეს, რადგან შედეგის თვალსაჩინოება ყოველთვის დამაკმაყოფილებელი არ არის. ასე რომ, ზოგიერთი მკითხველისთვის (ან მსმენელისთვის) შესაძლოა არ აღმოჩნდეს დამაჯერებელი კომპიუტერული პროგრამის მიერ ეკრანზე გამოტანილი შედეგი და საჭირო გახდეს ლოგიკური მსჯელობით მიღებული დამტკიცების წარმოდგენა.

საწინააღმდეგოს დაშვებით დამტკიცების საფუძველი არის გამონათქვამთა ლოგიკის კანონები: თუ A გამონათქვამიდან გამომდინარეობს მცდარი გამონათქვამი, მაშინ A გამონათქვამიც მცდარია; თუ B გამონათქვამის უარყოფა მცდარია, მაშინ B ჭეშმარიტი გამონათქვამია. დამტკიცების ამ ხერხის კლასიკური მაგალითია მარტივ

რიცხვთა სიმრავლის უსასრულობის დამტკიცება, რომელიც ევკლიდეს ეკუთვნის. ამ დამტკიცების თანამედროვე ვერსია ასეთია:

დავუშვათ საწინააღმდეგო - მარტივ რიცხვთა სიმრავლე სასრულია და ეს სიმრავლეა $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$. ავიღოთ ამ მარტივი რიცხვების ნამრავლი: $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ და განვიხილოთ რიცხვი $p = a + 1$. რადგან მარტივი რიცხვები დადებითია, მათი ნამრავლისა და 1-ის ჯამი მეტი იქნება თითოეულ მათგანზე. გარდა ამისა, თუ ამ რიცხვს გავყოფთ $p_1, p_2, \dots, p_k$ რიცხვებიდან ნებისმიერზე, ნაშთი იქნება 1-ის ტოლი. ამიტომ p რიცხვი თვითონაც მარტივი იქნება. რომელიც მეტია P სიმრავლის ყოველ ელემენტზე.

ისმება შეკითხვა: რომელია ის მცდარი გამონათქვამი, რომელიც მივიღეთ იმ დაშვების შედეგად, რომ მარტივი რიცხვების სიმრავლე სასრულია? თუ გავაანალიზებთ მივხვდებით, რომ ეს გამონათქვამია: მოცემული P რიცხვითი სიმრავლისათვის არსებობს ისეთი რიცხვი p , რომელიც მეტია P -ს თითოეულ ელემენტზე და ეკუთვნის ამავე სიმრავლეს. უფრო მეტი დეტალიზაციის შემდეგ შეიძლება ვთქვათ რომ ეს მცდარი გამონათქვამია $p > p$.

არსებობის დამტკიცების დროს გვაქვს რომელიღაც ობიექტის აღწერა და მიზანია იმის დასაბუთება, რომ ეს ობიექტი მართლაც არსებობს. თუ მკაცრად მივუდგებით, არსებობის დამტკიცებას არ შეიძლება ვუწოდოთ დამტკიცების ხერხი. პირიქით, არსებობის დამტკიცების დროს შეიძლება გამოვიყენოთ დამტკიცების სხვა ხერხები. მაგალითად, გადარჩევის ხერხი (შევამოწმოთ სიმრავლის ყველა ელემენტი და მივაგნოთ მოცემული აღწერის შესაბამის ელემენტს). მიუხედავად ამისა, ეს საკითხი მაინც ცალკე განხილვის ღირსია, რადგან არსებობის თეორემები მათემატიკაში ყველაზე ხშირად გვხვდება. განსაკუთრებით საყურადღებოა ის შემთხვევები, როდესაც არსებობის დამტკიცების დროს არ ხდება უშუალოდ ობიექტის კონსტრუირება ან მოძებნა, არამედ ხდება მხოლოდ მისი არსებობის დასაბუთება. არსებობის დამტკიცების გავრცელებული შემთხვევებია, როდესაც საჭიროა რომელიღაც ფუნქციის ნულების არსებობის დასაბუთება. ხშირად შეუძლებელია ცვლადის იმ მნიშვნელობის მოძებნა, რომელზეც ფუნქცია 0-ის ტოლი ხდება, მაგრამ სხვადასხვა შემოვლითი გზებით შესაძლებელია იმის დასაბუთება, რომ ცვლადის ასეთი მნიშვნელობა **არსებობს**.

ინდუქცია (დედუქციის საპირისპიროდ) ნიშნავს კერძო შემთხვევებისათვის სამართლიანი დებულების გავრცობას ზოგადზე. უფრო ზუსტად ინდუქცია ნიშნავს რომელიღაც სიმრავლის ქვესიმრავლისათვის სამართლიანი დებულების გავრცობას

მთელ სიმრავლეზე. არსებობს ინდუქციის სხვადასხვა ფორმალიზებული პროცედურა. სასკოლო მათემატიკაში გვხვდება მათემატიკური ინდუქციის ერთი ვერსია, რომელიც დაკავშირებულია ნატურალური რიცხვების სიმრავლესთან:

მათ.XI.9. მოსწავლეს შეუძლია დედუქციურ/ინდუქციური მსჯელობის და ალგებრული ტექნიკის გამოყენება გეომეტრიულ დებულებათა დასამტკიცებლად.

- განაზოგადებს ცალკეულ გეომეტრიულ დებულებებს; აყალიბებს ჰიპოთეზას და ასაბუთებს/უარყოფს მას (მათ შორის მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით; მაგალითად, ეილერის ფორმულა სიბრტყეზე და სივრცეში).

მათ.XII.2. მოსწავლეს შეუძლია მსჯელობა-დამტკიცების პროცესისა და მისი შედეგის ანალიზი.

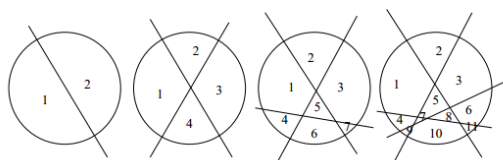
- ასაბუთებს რიცხვების თვისებების ან რიცხვით კანონზომიერებების შესახებ განზოგადებით, ანალოგიით მიღებულ დასკვნებს ან დებულებებს (მათ შორის მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით).

- ამონარიდი ეროვნული სასწავლო გეგმის მათემატიკის საგნობრივი პროგრამიდან.

როგორც წესი, მათემატიკური ინდუქცია გამოიყენება მაშინ, როდესაც საჭიროა ნატურალური პარამეტრის შემცველი იმ ზოგადი ფორმულის დასაბუთება, რომელიც სამართლიანია ამ პარამეტრის რამოდენიმე კერძო შემთხვევისათვის. ასეთი ფორმულები ხშირად გვხვდება ალგებრაში და კომბინატორიკაში. თუმცა, ზოგადად ამ მეთოდის გამოყენება გულისხმობს რამოდენიმე კერძო შემთხვევის განხილვის შედეგად ჰიპოთეზის ჩამოყალიბებას და შემდეგ ამ ჰიპოთეზის დასაბუთებას. ამიტომ მათემატიკური ინდუქციის წარმატებით გამოყენება შესაძლებელია ზოგიერთი გეომეტრიული დებულების დასაბუთებისას. მაგალითად:

რისი ტოლია იმ არეების უდიდესი რაოდენობა, რომლებიც იყოფა სიბრტყე მასზე გავლებული n ცალი წრფით?

განსხვავებით იმ შემთხვევებისაგან, როდესაც დასამტკიცებელი ფორმულა წინასწარაა მოცემული, ამ შემთხვევაში საჭიროა ჰიპოთეზის (ვარაუდის) ჩამოყალიბება. ხოლო ამისათვის საჭიროა ექსპერიმენტი. მათემატიკაში ექსპერიმენტი ნიშნავს რამოდენიმე კერძო შემთხვევის განხილვას:



როგორც საყოველთაოდაა მიღებული კვლევის დროს, საჭიროა ექსპერიმენტის შედეგების აღწერა. გამოვიყენოთ ცხრილი. ნახაზის მიხედვით, მონაცემები ასე გამოი-

ყურება ($R(n)$ აღნიშნავს n ცალი წრფის გავლების შედეგად მიღებული არეების რაოდენობას):

n	1	2	3	4
$R(n)$	2	4	7	11

მონაცემების ანალიზის შედეგად შეიძლება გამოვთქვათ ვარაუდი:

$$R(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

გამოვიყენოთ მათემატიკური ინდუქცია იმის დასამტკიცებლად, რომ ეს ფორმულა სწორია წრფეების ნებისმიერი რაოდენობისათვის. მისი შემოწმება რამოდენიმე საწყისი მონაცემისათვის სირთულეს არ წარმოადგენს (ფაქტიურად ჰიპოთეზის საფუძველი ხომ სწორედ ეს საწყისი მონაცემებია). ინდუქციის მეთოდის თანახმად, უნდა დავუშვათ რომ ეს ფორმულა სამართლიანია n -სათვის და ამის საფუძველზე უნდა დავასაბუთოთ, რომ იგი სამართლიანია $n + 1$ -სათვის. ვნახოთ რა მოხდება როდესაც გავავლებთ $n + 1$ -ე წრფეს. ზოგადი მდებარეობის შემთხვევაში, ეს წრფე გადაკვეთს დანარჩენ წრფეებს n განსხვავებულ წერტილში. ამ წერტილებით იგი დაიყოფა $n + 1$ ცალ მონაკვეთად. თითოეული ეს მონაკვეთი გაყოფს ადრე მიღებულ არეებს 2 ნაწილად. ამრიგად, არეების რაოდენობა გაიზრდება $n + 1$ -ით:

$$R(n + 1) = R(n) + n + 1.$$

დაშვების თანახმად $R(n) = (n^2 + n + 2)/2$. ამიტომ გვაქვს

$$R(n + 1) = \frac{n^2 + n + 2}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + 3n + 4}{2} = \frac{(n + 1)^2 + (n + 1) + 2}{2},$$

რის შემდეგაც ზოგადი ფორმულის დამტკიცება დასრულებულია.