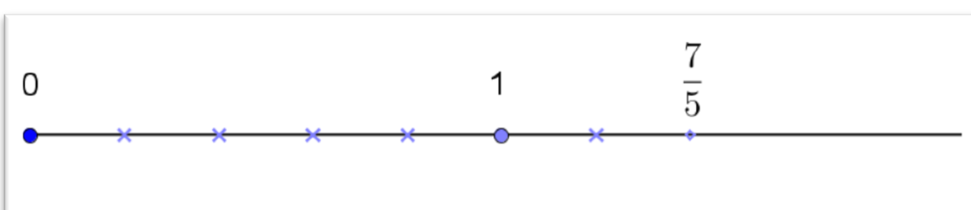
ზაქარია გიუნაშვილი

ირაციონალური რიცხვების გეომეტრია

რაციონალური რიცხვების სიმრავლე "ვერ ავსებს" რიცხვით ღერძს

სასკოლო მათემატიკის ერთ-ერთ მიმართულებას ეწოდება „***რიცხვები და მოქმედებები***“. ეს მიმართულება თავიდან ბოლომდე უწყვეტად გასდევს მათემატიკის საგნობრივ პროგრამას და შეიძლება ითქვას რომ მათემატიკის სწავლების საფუძველს წარმოადგენს. მათემატიკური აზროვნების პირველი ნაბიჯები სწორედ რიცხვებთან და რაოდენობებთან დაკავშირებული ცნებების და პროცედურების გააზრებასთანაა დაკავშირებული. ამასთან, რიცხვები და მათზე მოქმედებები წარმოადგენს მათემატიკის სხვა მიმართულებების აუცილებელ საყრდენს. სწორედ მათი საშუალებით ხდება გეომეტრიული ობიექტების თვისებების კვლევა, ალგებრული ცნებების შემოტანა ეფუძნება რიცხვებთან დაკავშირებული შესაბამისი ცნებების განზოგადებას, ხოლო მონაცემთა ანალიზის ყველა ძირითადი პროცედურა დაკავშირებულია რაოდენობრივი (რიცხვითი) მახასიათებლების გამოყენებასთან. ყოველივე აქედან გამომდინარე, რიცხვითი სისტემების და მათი თვისებების ღრმად გააზრება აუცილებელია ყველა სხვა მათემატიკური სტრუქტურების შესწავლისათვის.

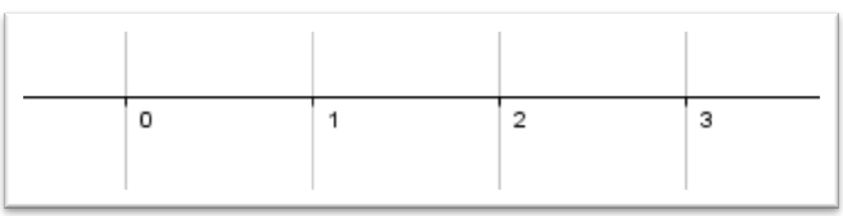
რიცხვის ცნების განმტკიცების პროცესში, დაწყებითი საფეხურიდანვე მნიშვნელოვანი დამხმარე საშუალებაა ***რიცხვითი ღერძი***. თავდაპირველად იგი გამოიყენება ნატურალური და მთელი რიცხვების და მათზე მოქმედებების სადემონსტარციოდ. შემდეგ, როდესაც შემოდის წილადის ცნება, რიცხვითი ღერძი გამოიყენება რაციონალური რიცხვების შემთხვევაშიც. ამ მოდელის ძირითადი არსი ისაა, რომ მყარდება ურთიერთცალსახა შესაბამისობა რიცხვებსა და რიცხვითი ღერძის (წრფის) წერტილებს შორის. მთელ რიცხვებს შეესაბამება ერთმანეთისაგან თანაბრად (ერთეულის შესაბამისი მანძილით) დაშორებული წერტილები; $\frac{m}{n}$ წილადს შეესაბამება წერტილი, რომელიც მიიღება [0, 1] მონაკვეთის დაყოფით n ტოლ ნაწილად და შემდეგ ამ ნაწილის m - ჯერ გადაზომვით (იხ. ნახაზი)



ამგვარად, შეიძლება ითქვას, რომ რიცხვითი სისტემების გაფართოების პროცესს (***ნატურალური რიცხვები*** $\subset$ ***მთელი რიცხვები*** $\subset$ ***რაციონალური რიცხვები***) თან სდევს რიცხვითი ღერძის მოდელი. ეს ხაზი ერთგვარად წყდება რაციონალური რიცხვების ნამდვილ რიცხვებამდე გაფართოების საფეხურზე. როგორც წესი, სას-კოლო მათემატიკის კურსში, ირაციონალური რიცხვის შემოტანა უკავშირდება ალ-გებრულ პროცედურებს. მაგალითად: არ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს $x^2 = 2$ განტოლებას. ამის მიზეზი ისაა, რომ სასკოლო მათემატიკის ფარგლებში არ არის გათვალისწინებული მათემატიკური ანალიზის ის აპარატი, რომელიც გამოიყენება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის გაფართოებისას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლემდე (სწორედ ეს მიდგომა ამყარებს ბუნებრივ კავშირს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესა და რიცხვით ღერძს შორის). მიუხედავად ამ უკმარისობისა, სასკოლო მათემატიკის კურსის ფარგლებშიც აუცილებელია ირაციონალური რიცხვის ცნების შემოტანა და სასურველია რომ ეს რაღაც ეტაპზე მაინც დაუკავშირდეს რიცხვით ღერძს.

ამის განხორციელება შესაძლებელია იმ ფაქტის წარმოჩენით, რომ როდესაც გვაქვს რაციონალური რიცხვები, რომლებსაც, კარგად დასაბუთებული და ნაცნობი პროცედურის საშუალებით რიცხვით ღერძზე შეესაბამება წერტილები, ამ ღერძზე გვრჩება „ცარიელი ადგილები“ - ისეთი წერტილები რომლებსაც რაციონალური რიცხვები არ შეესაბამება. როგორ უნდა მოხდეს ამის დემონსტრირება?

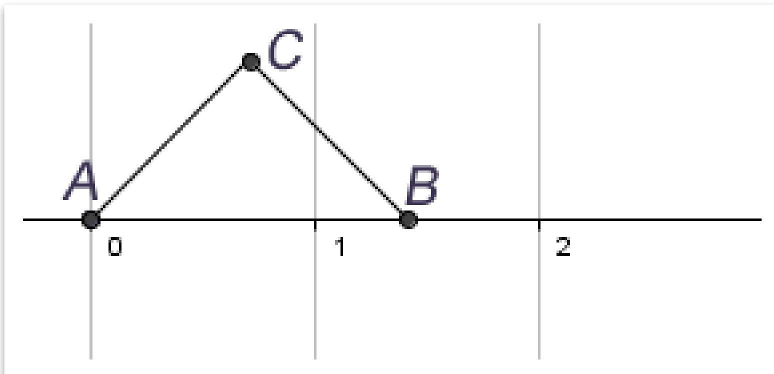
ე.ი. გვაქვს რიცხვითი ღერძი,



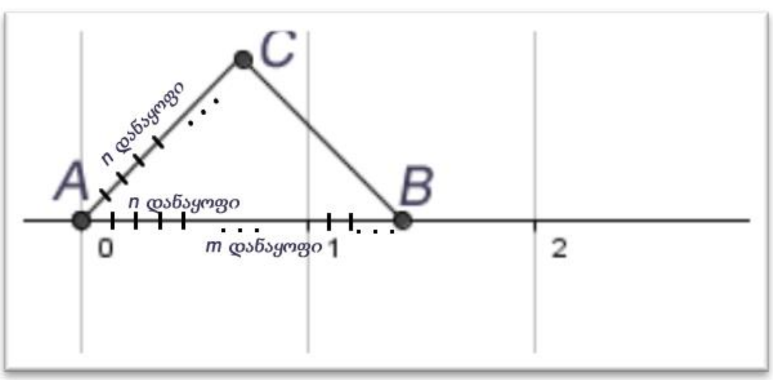
ჩვენთვის (... ***და რაც მთავარია მოსწავლეებისათვის, V კლასის შემდეგ***[1]) ცნობილია ის წესი რომლითაც შესაძლებელია რაციონალ რიცხვს შევუსაბამოთ წერტილი ამ რიცხვით ღერძზე. როგორ ვაჩვენოთ, რომ ამ წესის მიხედვით ***არსებობს ისეთი წერტილი რიცხვით ღერძზე, რომელსაც არ შეესაბამება რომელიმე რაციონალური რიცხვი***?

[1] *გამოსახავს ერთეულის ნაწილებს რიცხვით სხივზე და აღნიშნავს ტოლ ნაწილებს; ითვლის ასეთი ნაწილების შესაბამისი ბიჯით (მათ შორის ერთეულის გავლით)* – ესგ, V კლასი

ერთი საკმაოდ მარტივი ხერხი, რომელიც ამ დროს გამოგვადგება, დაკავშირებულია ყველასათვის ნაცნობ საკითხთან. განვიხილოთ მონაკვეთი, რომელიც არის იმ მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა რომლის კათეტების სიგრძეები 1-ის ტოლია: $|AC| = |CB| = 1$.



ჩნდება ბუნებრივი შეკითხვა: რომელი რაციონალური რიცხვი შეესაბამება B წერტილს? დავუშვათ მას შეესაბამება რომელიღაც რაციონალური რიცხვი $\frac{m}{n}$. რაციონალური რიცხვის შესაბამისი წერტილის მოძებნის წესის მიხედვით, ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ $[0,\ 1]$ მონაკვეთს დავყოფთ n ტოლ ნაწილად, მაშინ დაყოფის მონაკვეთი AB-ში მოთავსდება ზუსტად m -ჯერ. ეს დაყოფა შეიძლება გავიმეოროთ AC მონაკვეთისთვისაც, რომლის სიგრძე 1-ის ტოლია (იხ. ნახაზი)



სიგრძის ერთეულად ავიღოთ დაყოფის მონაკვეთის სიგრძე. ამ ერთეულებში გვექნება: $|AC| = |CB| = n,\ \ |AB| = m$. პითაგორას თეორემის თანახმად გვექნება $n^2 + n^2 = m^2$. ამ საფეხურის შემდეგ ასეთი ტოლობის შეუძლებლობის დასაბუთება მთელი რიცხვებისათვის გაგრძელდება კარგად ნაცნობი სქემით.

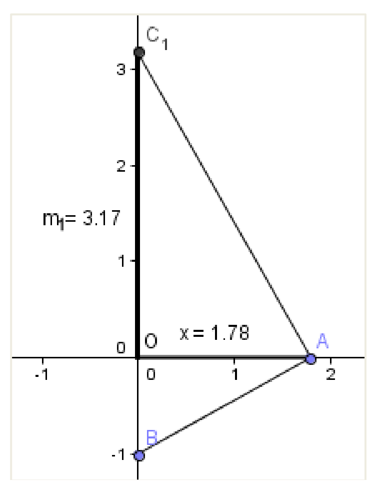
პედაგოგიური თვალსაზრისით ეს გეომეტრიული და თვალსაჩინოებაზე დამყარებული მიდგომა ხელს უწყობს ცნების უკეთ გააზრებას და წარმოაჩენს კავშირს მათემატიკის სხვადასხვა მიმართულებებს შორის.

სხვა ირაციონალური რიცხვების ძიება რიცხვით ღერძზე

მათემატიკაში ირაციონალური რიცხვების წარმომავლობა მრავალგვარია. სასკოლო მათემატიკის ფარგლებში ირაციონალური რიცხვების ძირითადი წარმომავლობა უკავშირდება ალგებრულ განტოლებებს. წინა ნაწილში განხილული კონსტრუქცია ეყრდნობა იმას, რომ არსებობს ალგებრული ობიექტის ($x^2 = 2$ განტოლების) შესაბამისი გეომეტრიული ობიექტი (მონაკვეთი, რომლის სიგრძე იძლევა ამ განტოლების ამონახსნს). ჩნდება ბუნებრივი შეკითხვა: ***ყველა ალგებრული განტოლებისათვის არსებობს თუ არა ისეთი გეომეტრიული ობიექტი (მონაკვეთი), რომელიც შეესაბამება ამ განტოლების ამონახსნს***? ამ შემთხვევაში ჩვენ შევჩერდებით მხოლოდ $x^n = m$ სახის განტოლებებზე, სადაც n და m რომელიღაც ნატურალური რიცხვებია. მართალია განტოლებების ეს კლასი ვერ ამოწურავს ირაციონალურ რიცხვებს, ისინი გაცილებით მეტია, მაგრამ მათი განხილვა აფართოებს მოსწავლის თვალსაწიერს და მას უჩნდება დასაბუთებული წარმოდგენა იმის შესახებ, რომ რიცხვით ღერძზე არსებობს საკმაოდ ბევრი ისეთი წერტილი, რომლებიც მხოლოდ რაციონალური რიცხვებით ვერ დაიფარება.

ამგვარად, ჩვენი ამოცანა ასეთია:

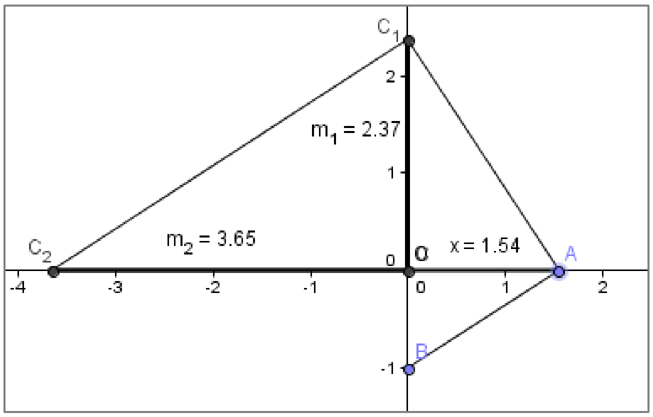
მოვიფიქროთ ისეთი გეომეტრიული კონსტრუქცია, რომლის გამოყენებითაც ნებისმიერი $\boldsymbol{x^n = m}$, $\boldsymbol{n, m} \in \mathbb{N}$ განტოლებისათვის ავაგებთ ისეთ მონაკვეთს, რომლის სიგრძე არის ამ განტოლების ამონახსნი.



OY ღერძზე დავაფიქსიროთ B წერტილი, რომელიც შეესაბამება -1-ს, ხოლო OX ღერძზე ავიღოთ A წერტილი, რომელიც შეესაბამება x რიცხვს. ამ წერტილზე გავავლოთ AB-ს მართობი. დავუშვათ იგი გადაკვეთს OY-ს რომელიღაც C_1 წერტილში (იხ. ნახაზი). შემოვიღოთ აღნიშვნა: $|OC_1| \equiv m_1$. მართკუთხა სამკუთხედის სიმაღლის თვისების თანახმად გვაქვს ტოლობა

$$|AO|^2 = |OB| \cdot |OC_1| \;\; \Rightarrow \;\; x^2 = m_1.$$

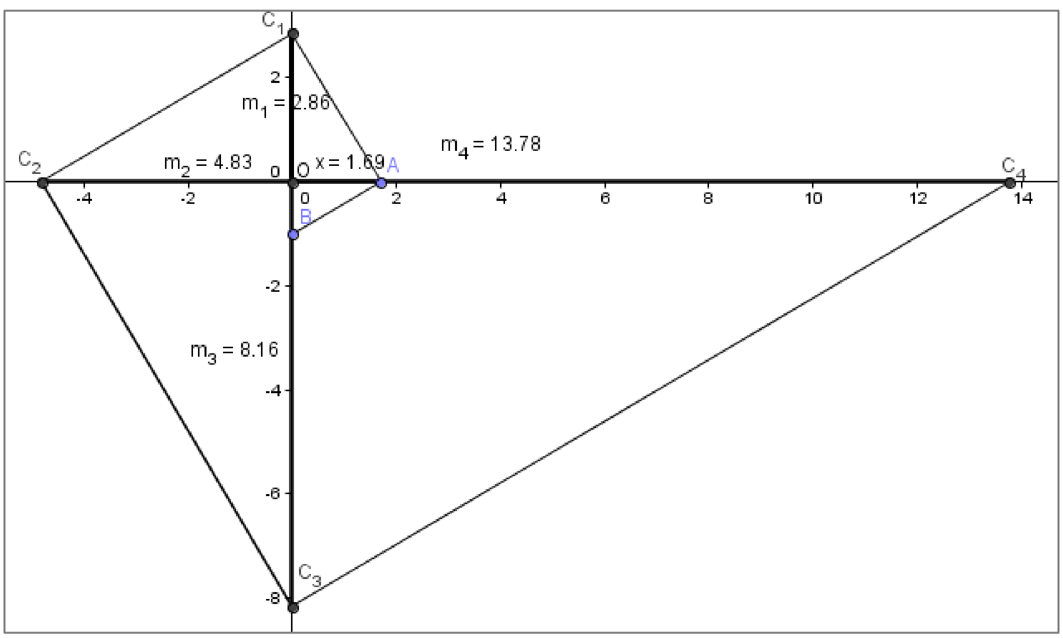
ამის შემდეგ C_1 წერტილზე გავავლოთ AC_1-ის მართობი. მისი გადაკვეთა OX ღერძთან ავღნიშნოთ C_2-ით, $|OC_2| \equiv m_2$



კვლავ მართკუთხა სამკუთხედის სიმაღლის თვისების თანახმად გვექნება ტოლობები

$$m_1^2 = m_2 \cdot x, \;\; x^2 = m_1 \quad \Longrightarrow \quad x^3 = m_2.$$

ეს გეომეტრიული კონსტრუქცია შეგვიძლია გავაგრძელოთ სასურველი რაოდენობით



შესაბამისი ალგებრული პროცედურების ჩატარების შედეგად შეიძლება დავრწმუნდეთ იმაში, რომ n საფეხურის შემდეგ მიღებულ OC_{n-1} მონაკვეთის სიგრძესა და $x = |OA|$-ს შორის დამოკიდებულება ასეთია: $x^n = |OC_{n-1}| \equiv m$.

როგორც ვხედავთ, ეს მიდგომა ერთმანეთთან აკავშირებს სხვადასხვა მათემატიკურ ცნებას და პროცედურას მათემატიკის სხვადსხვა მიმართულებიდან. ამასთან იგი

საფუძველს უყრის ზოგიერთი ისეთი წარმოდგენის ჩამოყალიბებას, რომლების უშუალოდ არ არის გათვალისწინებული სასკოლო მათემატიკის კურსში, თუმცა თავისთავად ძალზე მნიშვნელოვანია. მაგალითად, ასეთია უწყვეტობა. კერძოდ, როდესაც გვაქვს $x^n = m$ სახის განტოლება, საჭიროა A წერტილი გადავაადგილოთ OX ღერძის გასწვრივ ისე, რომ C_{n-1} წერტილმა მიიღოს ის მდებარეობა, როდესაც $|OC_{n-1}| = m$. A წერტილის ასეთი მდებარეობის არსებობა მთლიანად ეფუძნება უწყვეტობის ცნებას: თუ $A = A'$ და $A = A''$ მდებარეობების შესაბამისი მდებარეობებია $C_{n-1} = C'$ და $C_{n-1} = C''$, მაშინ A წერტილის მოძრაობისას A'-სა და A''-ს შორის, C_{n-1} მოხვდება ყველა წერტილში C' სა C'' -ს შორის. სწორედ ეს უწყვეტობა უზრუნველყოფს იმას, რომ ნებისმიერი $m \in \mathbb{N}$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი x რომელიც იქნება $x^n = m$ განტოლების ამონახსნი.