

ფიზიკა ამოცანებში – მუდმივობის კანონები მექანიკაში

(გაგრძელება - 8)

წინამდებარე წერილში გთავაზობთ ამოცანებს მექანიკაში იმპულსის და ენერჯის მუდმივობის კანონების გამოყენებაზე, აგრეთვე მუშაობის გამოთვლაზე და მათ კავშირზე მექანიკური ენერჯის ცვლილებასთან.

მაგიდაზე დადებული თოკის მოძრაობა: L სიგრძის ერთგვაროვანი თოკი ძვეს გლუვ ჰორიზონტალურ მაგიდაზე ისე, რომ მისი ერთი ბოლო მაგიდის ნაპირზეა. დროს რომელიღაც მომენტში თოკს უბიძგეს და მან დაიწყო ჩამოსრიალება უწყვეტად. იპოვეთ, თოკის აჩქარების და სიჩქარის დამოკიდებულება თოკის იმ ნაწილის x სიგრძეზე, რომელიც გადმოკიდებულია მაგიდიდან.

თოკს აჩქარებას ანიჭებს სიმძიმის ძალა, რომელიც მოქმედებს თოკის მაგიდიდან გადმოკიდებულ ნაწილზე. ცხადია ეს ძალა შეადგენს თოკზე მოქმედი სიმძიმის ძალის რაღაც ნაწილს და იგი ტოლია

$$F = Mg \frac{x}{L},$$

სადაც M არის მთლიანი თოკის მასა. ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად თოკის აჩქარება იქნება

$$a = \frac{F}{M} = g \frac{x}{L}.$$

ამ მომენტისთვის თოკის სიჩქარე გამოვთვალოთ ენერჯის მუდმივობის კანონის გამოყენებით. თოკის x სიგრძის მქონე ნაწილის სიმძიმის ცენტრი მაგიდიდან ჩამოსრიალების დროს დაიწევს მანძილით

$$h = \frac{x}{2}.$$

თუ პოტენციური ენერჯის ნულოვან დონედ ავირჩევთ თოკის გადმოკიდებული ნაწილის (x სიგრძის) სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა, მაშინ ენერჯის მუდმივობის კანონის თანახმად

$$Mg \frac{x^2}{2L} = M \frac{v^2}{2}.$$

საიდანაც სიჩქარისთვის მივიღებთ:

$$v = \sqrt{g \frac{x^2}{L}}.$$

როდესაც თოკი მთლიანად ჩამოსრიალდება, მისი სიჩქარე იქნება $v = \sqrt{gL}$.

აბსოლუტურად დრეკადი დაჯახება: m_1 მასის სხეული ეჯახება m_2 მასის უძრავ სხეულს აბსოლუტურად. იპოვეთ უძრავი სხეულისთვის გადაცემული ენერგია სისტემის საწყისი ენერგიის რა ნაწილს შედგენს და გამოსახეთ იგი სიდიდით $k = m_1/m_2$, თუ დაჯახება არის აბსოლუტურად დრეკადი და ცენტრალური.

რადგან დაჯახება არის აბსოლუტურად დრეკადი, ვიყენებთ იმპულსის და მექანიკური ენერგიის მუდმივობის კანონებს. კერძოდ

$$m_1 \vec{v} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2,$$
$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

კოორდინატა x ღერძი ავირჩიოთ პირველი სხეულის საწყისი სიჩქარის \vec{v} გასწვრივ. მაშინ პირველი განტოლების დაგეგმილებით ამ ღერძზე მივიღებთ:

$$m_1 v = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}. \quad (1)$$

დავწეროთ ეს და ენერგიის მუდმივობის კანონის გამომსახველი ფორმულა შემდეგნაირად:

$$m_1(v - v_{1x}) = m_2 v_{2x},$$
$$m_1(v^2 - v_{1x}^2) = m_2 v_{2x}^2.$$

თუ მათ შევაფარდებთ ერთმანეთთან, მივიღებთ:

$$v + v_{1x} = v_{2x}.$$

ჩავსვათ v_{2x} ეს მნიშვნელობა (1)-ში. საბოლოოდ სხეულების სიჩქარეებისთვის დაკახების შემდეგ მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს.

$$v_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v,$$
$$v_{2x} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v.$$

როგორც ვხედავთ მასებს შორის თანაფარდობის მიხედვით პირველი სხეული ან გააგრძელებს მოძრაობას იგივე მიმართულებით ($m_1 > m_2$), ან ამოძრავდება საპირისპირო მიმართულებით ($m_1 < m_2$). ორივე შემთხვევაში მეორე სხეულისთვის გადაცემული ენერგია არის ერთი და იგივე:

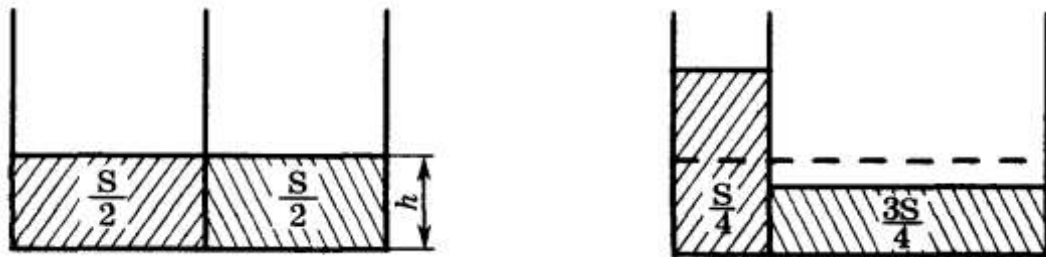
$$E_{2k} = \frac{2m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} v^2.$$

იგი შეადგენს საწყისი ენერჯის $E = m_1 v^2 / 2$

$$f = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4k}{(1 + k)^2}$$

ნაწილს. როგორც ვხედავთ ეს ფარდობა მით მეტია, რაც უფრო ახლოს არის კოეფიციენტი k – მასების შეფარდება – ერთთან და მაქსიმალურ მნიშვნელობა აღწევს მასების ტოლობის შემთხვევაში, ანუ როდესაც $k = 1$ და ეს მაქსიმალური მნიშვნელობა ერთის ტოლია. ამრიგად მასების ტოლობის შემთხვევაში, დაჯახების შემდეგ პირველი სხეული ჩერდება, ხოლო მეორე ამოძრავდება პირველი სხეული საწყისი სიჩქარით.

სითხის ენერჯის ცვლილება: აუზი, რომლის ფსკერის ფართობია $S = 100\text{მ}^2$, ავსებულია წყლით ფსკერიდან $h = 2$ სიმაღლეზე და გაყოფილია ორ ტოლ ნაწილად ვერტიკალური ძგიდით. რა A მუშაობა უნდა შევასრულოთ, რომ ძგიდე ნელა გადავადგილოთ ჰორიზონტალურად ისე, რომ წყალმა არ გაჟონოს არცერთ ნაწილში და საბოლოო მდგომარეობაში აუზი გაიყოს 1:3 თანაფარდობით (იხ. ნახ. 1)?



ნახ. 1

პირველ რგში მივიღოთ მხედველობაში, რომ ძგიდე გადაადგილდება ნელა და მაშასადამე წყალს კინეტიკური ენერჯია არ შეუძენია. მუშაობა, რომელიც უნდა შევასრულოთ ტოლი იქნება სისტემის სრული მექანიკური ენერჯის ცვლილების, ამ შემთხვევაში სისტემის პოტენციური ენერჯის ცვლილების. საბოლოო მდგომარეობაში სითხის დონეების სიმარლე ფსკერიდან განისაზღვრება აუზის ორივე ნაწილში სითხის მოცულობების უცვლელობით. აუზი მარცხენა და მარჯვენა ნაწილებისთვის შესაბამისად გვაქვს :

$$\frac{S}{2} h = \frac{S}{4} h_1, \quad \frac{S}{2} h = \frac{3S}{4} h_2,$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ

$$h_1 = 2h, \quad h_2 = \frac{2h}{3}.$$

საძიებელი მუშაობა ტოლია $A = E_2 - E_1$, სადაც E_1 და E_2 სისტემის საწყისი და საბოლოო პოტენციური ენერჯებია:

$$E_1 = mgh, \quad E_2 = \frac{m}{2} g 2h + \frac{m}{2} g \frac{2}{3} h = \frac{4}{3} mgh,$$

ამრიგად

$$A = \frac{1}{3} mgh = \frac{1}{3} \rho g S h^2 = 650 \text{კჯ} .$$

რაკეტის მოძრაობა: უშუალოდ დედამიწაზე დაჯდომის წინ M მასის მქონე რაკეტა მომუშავე ძრავით „ჩამოეკიდა“ ჰაერში. ძრავის მიერ გამოტყორცნილი აირის სიჩქარე არის u . გამოთვალეთ რაკეტის ძრავის სიმძლავრე N .

ძრავის სიმძლავრე გამოვთვალოთ ძრავის მის მიერ t დროში შესრულებული A მუშაობით:

$$N = \frac{A}{t} .$$

ძრავის მუშაობა განისაზღვრება სისტემის „რაკეტ –საწვავი“ ენერჯის ცვლილებით, რადგან რაკეტა უძრავია, ეს მუშაობა იქნება გამოტყორცნილი აირის კინეტიკური ენერჯის ტოლი:

$$A = \frac{\Delta mu^2}{2} .$$

აქ Δm არის გამოტყორცნილი აირის მასა. მის გამოსათვლელად გავიხსენოთ, რომ რაკეტა „ჩამოკიდებულია“ ჰაერში, ე.ი. უძრავია და მამასადამე აირი რაკეტაზე მოქმედებს F ძალით, რომელიც აწონასწორებს რაკეტაზე მოქმედ სიმძიმის ძალას: $F = Mg$. ამავე დროს ნიუტონის მესამე კანონის ძალით რაკეტა მოქმედებს გამოტყორცნილ აირზე იგივე სიდიდის F და ეს ძალა იწვევს აირის იმპულსის ცვლილებას შემდეგი ტოლობის შესაბამისად:

$$Ft = \Delta mu .$$

ორი ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ სიმძლავრე

$$N = \frac{Mgu}{2} .$$

მორაობა მუდმივი სიმძლავრით: m მასის ავტომობილი მოძრაობს $\alpha=30^\circ$ დახრილობის აღმართზე $v_1 = 6\text{მ/წმ}$ სიჩქარით, ხოლო იგივე აღმართზე უკან ბრუნდება $v_2 = 9\text{მ/წმ}$ სიჩქარით. როგორი v სიჩქარით იმოძრავებს ავტომობილი ჰორიზონტალურ გზაზე, თუ ძრავის სიმძლავრე N სამივე შემთხვევაში ერთი და იგივეა?

აღმართზე მოძრაობისას ძრავის უხდება სიმძიმის ძალის და ხახუნის ძალის წინააღმდეგობის დაძლევა, და ამიტომ წევის ძალა

$$F_1 = \mu mg \cos \alpha + mg \sin \alpha .$$

აქ μ არის ხახუნის კოეფიციენტი. დაღმართზე მოძრაობის დროს წევის ძალა ტოლია

$$F_2 = \mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha ,$$

ხოლო ჰორიზონტალურ გზაზე მოძრაობის დროს ძრავას უხდება მხოლოდ ხახუნის დაძლევა და ამიტომ წევის ძალა ტოლია

$$F_3 = \mu mg .$$

ავტომობილის თანაბრად მოძრაობის დროს მისი სიმძლავრე $N = Fv$. რადგან ციმზლავრე სამივე შემთხვევაში ერთნაირია, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$N = (\mu mg \cos \alpha + mg) v_1 = (\mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha) v_2 = \mu mg v .$$

გავითვალისწინოთ, რომ აღმართი არის მცირე დახრილობის და $\cos \alpha$ მივიღოთ ერთის ტოლად. მაშინ შეგვიზღია დავწეროთ შემდეგი ტოლობა:

$$\frac{N}{v_1} + \frac{N}{v_2} = \frac{2N}{v} \cos \alpha ,$$

მარტივად მივიღებთ:

$$v = \frac{2v_1 v_2 \cos \alpha}{v_1 + v_2} = 6.24 \frac{\text{მ}}{\text{წმ}} .$$

მუშაობა და პოტენციური ენერჯია: ორი ნივთიერი წერტილის ურთიერთქმედების პოტენციური ენერჯია არის $E_p = \frac{C}{r}$. აჩვენეთ, რომ ნივთიერი წერტილების ურთიერთქმედების ძალა F არის მანძილის კვადრატის უკუპროპორციული. რა შემთხვევაში იზიდავენ ისინი ერთმანეთს და რა შემთხვევაში განიზიდავენ.

წერტილებს შორის მანძილის Δr სიდიდით გაზრდისას პოტენციური ენერჯიის ცვლილება იქნება

$$\Delta E_p = \frac{C}{r + \Delta r} - \frac{C}{r} = -\frac{C \Delta r}{r(r + \Delta r)} = -\frac{C \Delta r}{r^2}.$$

აქ ჩვენ გავითვალისწინეთ Δr სიმცირე. ამ დროს მათ შორის ურთიერთქმედების F ძალა ასრულებს მუშაობას, რომელიც ტოლია პოტენციური ენერჯიის ცვლილების საპირისპირო ნიშნით:

$$A = -\Delta E_p = \frac{C \Delta r}{r^2}.$$

ეს მუშაობა თავის მხრივ ტოლია $A = F \Delta r$. ბოლო ორი ტოლობის შედარებით მივიღებთ

$$F = \frac{C}{r^2}.$$

რქაც შეეხება მიზიდვას/განიზიდვას გავითვალისწინოთ, რომ პოტენციური ენერჯიის ნულოვანი მდგომარეობა, როცა წერტილები უსასრულოდ არიან დაშორებულნი. თუ წერტილებს ერთმანეთს დავუახლოვებთ, მაშინ პოტენციური ენერჯია იზრდება, თუ $C > 0$ და პირიქით მცირდება, თუ $C < 0$. პირველ შემთხვევაში ძალა ასრულებს უარყოფით მუშაობას (პოტენციური ენერჯია იზრდება), რაც იმას ნიშნავს, რომ ძალა გადაადგილების საპირისპიროდ არის მიმართული და მამასადამე სხეულები განიზიდავენ ერთმანეთს. მეორე შემთხვევაში ძალა ასრულებს დადებით მუშაობას და ძალა მიმართულია გადაადგილების გასწვრივ, ანუ სხეულების ერთმანეთს მიიზიდავენ. ამრიგად სხეულები ერთმანეთს განიზიდავენ, თუ $C > 0$ და მიიზიდავენ, თუ $C < 0$. გავიხსენოთ, რომ მსოფლიო მიზიდულობის კანონის ძალით ორი სხეული ერთმანეთს იზიდავს ძალით

$$F = G \frac{mM}{r^2}.$$

ეს შეესაბამება დადებითი C შემთხვევას. ორს სხეული ურთიერთქმედების პოტენციური ენერჯია კი იქნება

$$\Delta E_p = -G \frac{mM}{r}.$$

ცილინდრში წყლის მოძრაობა: ჰორიზონტალურად მდებარე D დიამეტრის ცილინდრში მოთავსებული წყალი და დგუში. დგუში გადაადგილდება ჰორიზონტალურად F ძალის მოქმედებით, ხოლო წყალი იღვრება ცილინდრიდან ცილინდრის ფუძეში გაკეთებული d დიამეტრის ხვრელიდან. რა u სიჩქარით გადაადგილდება დგუში? ხახუნი უგულებელყავით. სითხის სიმკვრივეა ρ .

დგუშის გადაადგილების დროს ცილინდრიდან იღვრება რაღაც Δm მასის წყალი. დგუშზე მოქმედი ძალა ასრულებს მუშაობას, რომელიც ტოლია გადმოღვრილი სითხე კინეტიკური ენერჯიის ცვლილების:

$$A = Fu\Delta t = \frac{\Delta m v^2}{2} - \frac{\Delta m u^2}{2}.$$

აქ v არის გადმოღვრილი სითხის სიჩქარე, ხოლო Δt დრო, რომლის განმავლობაში გადაადგილდება დეფუმი. ეს სიჩქარე გამოითვლება ფორმულით:

$$\frac{v}{u} = \frac{S}{s} = \frac{D^2}{d^2}.$$

გამოღვრილი წყლის მასა ტოლია

$$\Delta m = \frac{\pi D^2}{4} \rho u \Delta t.$$

ამ ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ საძიებელი სიჩქარის შემდეგ გამოსახულებას:

$$u = \frac{d^2}{4} \sqrt{\frac{8F}{\pi\rho(D^4 - d^4)}}.$$

მაფზე ჩამოკიდებული ბურთულების დაჯახება: ორი ბურთულა ჩამოკიდებული ორ პარალელურ და ტოლი სიგრძის ძაფებზე. ბურთულების მასებია: $m_1 = 0.2$ და $m_2 = 0.1$ კგ. პირველი ბურთულა გადახარეს ისე, რომ მისი სიმძიმის ცენტრმა აიწია $h = 4.5$ მ სიმაღლეზე და შემდეგ გაუშვეს. რა სიმაღლეზე ავლენ ბურთულები, თუ დაჯახება არის ა) დრეკადი; ბ) არადრეკადი.

ა) დრეკადი დაჯახების დროს ბურთულებისთვის იმპულსის მუდმივობის კანონის თანახმად (პირველი ბურთულას მასა მეტია)

$$m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

მაგრამ ენერგიის მუდმივობის კანონის თანახმად (ცალ-ცალკე ბურთულებისთვის) $v = \sqrt{2gh}$, $v_1 = \sqrt{2gh_1}$, $v_2 = \sqrt{2gh_2}$. აქ h_1 და h_2 შესაბამისად სიმაღლეებია, რომლებზეც ავლენ ბურთულები დაჯახების შემდეგ. ამ ფორმულების გათვალისწინებით იმპულსის მუდმივობის კანონი მიიღებს შემდეგ სახეს

$$m_1 \sqrt{2gh} = m_1 \sqrt{2gh_1} + m_2 \sqrt{2gh_2}$$

სისტემისთვის ენერგიის მუდმივობის კანონი თანახმად

$$m_1 gh = m_1 gh_1 + m_2 gh_2.$$

გადავწეროთ ეს განტოლებები შემდეგი სახით:

$$m_1 \sqrt{2gh} - m_1 \sqrt{2gh_1} = m_2 \sqrt{2gh_2}, \quad (1)$$

$$m_1 gh - m_1 gh_1 = m_2 gh_2. \quad (2)$$

მათი ერთმანეთზე გაყოფით მივიღებთ:

$$\sqrt{h_2} = \sqrt{h_1} + \sqrt{h}. \quad (3)$$

(2) და (3) განტოლებების ამოხსნით მივიღებთ:

$$h_1 = h \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = 0.5 \text{ მ.}$$

$$h_2 = 4h \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 = 8 \text{ მ.}$$