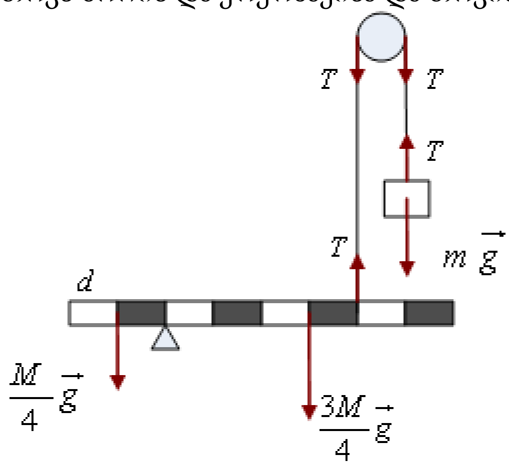
ავთანდილ შურღაია
ფიზიკა ამოცანებში. დინამიკა
(ნაწილი მე-6)

ვაგრძელებთ დინამიკის ამოცანების განხილვას. წინა წერილში განვიხილეთ სხეულის მოძრაობა დახრილ სიბრტყეზე და გადაბმული სხეულების მოძრაობა. ამჯერად შემოგთავაზებთ ამოცანებს რამდენიმე სხეულის მონაწილეობით, რომელთა ამოხსნისას მსოფლიო მიზიდულობის კანონის გამოყენებაც მოგვიხდება. შევეხებით აგრეთვე წონასწორობის პირობების გამოყენებას.

ამოცანა წონასწორობის პირობაზე. 1-ელ ნახატზე გამოსახულია M=10 კგ მასის მქონე ერთგვაროვანი ღერო, რომელიც წონასწორობაში იმყოფება. ღეროს სიგრძეა $8d$. როგორი უნდა იყოს თოკზე ჩამოკიდებული სხეულის მასა m, თუ უგულებელვყოფთ ხახუნს ჭოჭონაქსა და თოკს შორის და ჭოჭონაქისა და თოკის მასებს?*



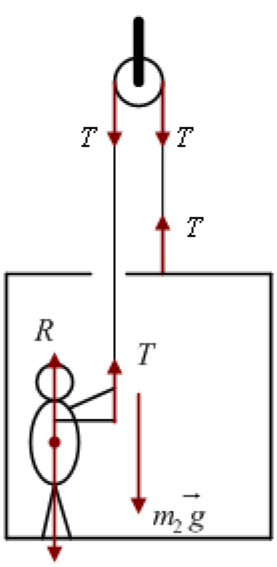
ნახ. 1

ღეროს აქვს საყრდენი, რომელიც შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ბრუნვის ღერძი. ეს უკანასკნელი ღეროს 2:6 თანაფარდობით ყოფს. იმავე თანაფარდობით გაყოფილია ღეროს მასაც. ამიტომ საყრდენი წერტილის მარცხნივ ღეროზე მოქმედებს სამჯერ ნაკლები სიმძიმის ძალა, ვიდრე მარჯვნივ. ვინაიდან ღერო ერთგვაროვანია, მათი მოდების წერტილები ღეროს შესაბამისი ნაწილების შუაწერტილებია. მომენტების წესის თანახმად, ვწერთ შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{M}{4}gd + 4Td = \frac{3M}{4}g3d.$$

მეორე მხრივ, ჭოჭონაქზე გადაკიდებული სხეული, წონასწორობის პირობის თანახმად, $2T = mg$. აქ ჩვენ გამოვიყენეთ ამოცანის პირობა, რომლის თანახმად, ჭოჭონაქსა და თოკს შორის ხახუნისა და და ჭოჭონაქისა და თოკის მასების უგულებელყოფა შეიძლება. ჭოჭონაქი და ძაფზე ჩამოკიდებული ტვირთი კი, ნიუტონის მესამე კანონის თანახმად, ერთმანეთთან ტოლი სიდიდის ძალებით ურთიერთქმედებს. ამ ორი განტოლების ამოხსნით მარტივად მივიღებთ, რომ $m = M = 10$ კგ.

ამოცანა ლიფტის მოძრაობაზე. ადამიანი იმყოფება ლიფტში და ქვემოთ ექაჩება თოკს, რომელიც გადაკიდებულია უმასო ჭოჭონაქზე და მიბმულია ლიფტის სახურავზე. ადამიანის მასა m_1= 80კგ, ხოლო ლიფტის მასა $m_2 = 40$კგ. გამოთვალეთ ადამიანზე მოქმედი რეაქციის ძალა R და თოკის დაჭიმულობის ძალა T. ლიფტი მოძრაობს $a = 0.5$მ/წმ² აჩქარებით.



ნახ. 2

განვიხილოთ ლიფტისა და ადამიანის როგორც ერთი სხეულის მოძრაობა. ამ სისტემაზე მოქმედი ძალებია: ლიფტზე მოქმედი ზევით მიმართული თოკის დაჭიმულობის ძალა T, ადამიანზე მოქმედი ზევით მიმართული თოკის დაჭიმულობის ძალა T და სიმძიმის ძალა. ვინაიდან აჩქარება მიმართულია ვერტიკალურად ზევით, ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად:

$$2T - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a.$$

ცალკე ადამიანისთვის ნიუტონის მეორე კანონს ექნება შემდეგი სახე:

$$R + T - m_1g = m_1a.$$

ამ განტოლებებიდან მარტივად მიიღება

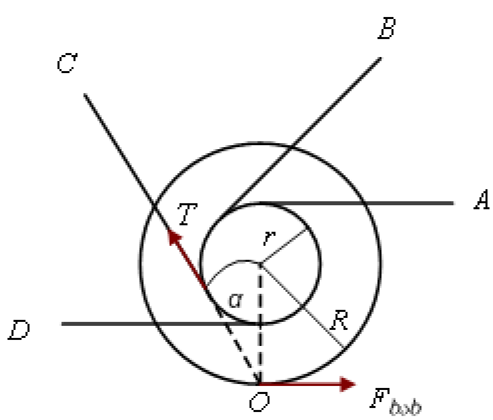
$$T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)(g+a)=630\text{ნ},\ R=\frac{1}{2}(m_1-m_2)(g+a)=210\text{ნ}$$

წარმოიდგინეთ უძრავ ლიფტში მყოფი იმავე მასის ადამიანი, რომელიც სასწორზე დგას. აღწერეთ, როგორ შეიცვლება სასწორის ჩვენება: ა) ლიფტის ზემოთ მოძრაობისას მის გაჩერებამდე; ბ) ლიფტის ქვემოთ მოძრაობისას მის გაჩერებამდე.

ა) ზემოთ მიმავალი ლიფტი მოძრაობას იწყებს ზემოთ მიმართული აჩქარებით. ამ დროს ადამიანის წონა იმატებს. შესაბამისად, იმატებს სასწორის ჩვენებაც. შემდეგ ლიფტი მოძრაობას მუდმივი სიჩქარით აგრძელებს და სასწორის ჩვენებაც პირვანდელს უბრუნდება. როდესაც ლიფტი იწყებს გაჩერებას, მისი აჩქარება უკვე ქვემოთ არის მიმართული და, მაშასადამე, სასწორის ჩვენება იკლებს. როგორც კი ლიფტი გაჩერდება, ჩვენება კვლავ პირვანდელს დაუბრუნდება.

ბ) ქვემოთ მიმავალი ლიფტი მოძრაობას იწყებს ქვემოთ მიმართული აჩქარებით, სასწორის ჩვენება იკლებს. შემდეგ ლიფტი მოძრაობას აგრძელებს მუდმივი სიჩქარით და სასწორის ჩვენებაც პირვანდელს უბრუნდება. გაჩერებისას აჩქარება მიმართულია ზემოთ, სასწორის ჩვენება იმატებს.

კოჭაზე დახვეული ძაფი: მასიურ კოჭაზე დახვეული ძაფი ძევს ხაოიან ჰორიზონტალურ ზედაპირზე, რომელზეც მას შეუძლია გორვა სრიალის გარეშე. თუ ძაფს ჰორიზონტალური მიმართულებით გასწევენ მარჯვნივ (ნახ. 3, მდგომარეობა A), კოჭაც იმავე მიმართულებით გაგორდება. აღწერეთ, როგორ შეიცვლება მოძრაობის ხასიათი ძაფის ნახაზზე მოცემული B, C, D მდგომარეობებისთვის. გამოთვალეთ კუთხე α და აღწერეთ ამ კუთხის არსი, თუ კოჭას შიდა და გარე რადიუსებია, შესაბამისად, R და r.

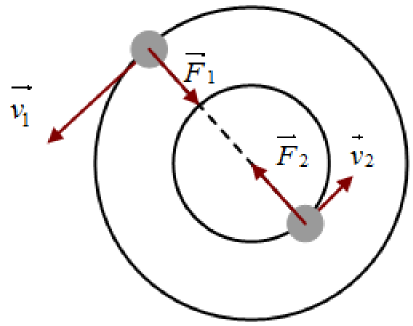


ნახ. 3

კოჭას ზედაპირთან შეხების წერტილი O წარმოადგენს მისი ბრუნვის მყისიერ ღერძს. O წერტილიდან გავავლოთ შიდა წრეწირის მხები. თუ ძაფის მიმართულება ემთხვევა ამ მხებს, მაშინ კოჭაზე მოქმედი ბრუნვის მომენტი ნულის ტოლია და კოჭა არ იბრუნებს. ნახაზიდან ჩანს, რომ α კუთხე გამოითვლება ფორმულით $\sin\alpha=r/R$. თუ ძაფის დახრილობის კუთხე აღემატება ამ მნიშვნელობას, მაშინ კოჭა მარცხნივ დაიწყებს ბრუნვას, ხოლო თუ ნაკლებია - მარჯვნივ, იმ პირობით, რომ კოჭასა და ზედაპირს შორის სრიალი არ ხდება. α კუთხის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ ამ კუთხეზე დაჭიმულობის ძალის მაბრუნებელი მომენტი იცვლის თავის მაბრუნებელ ქმედებას და კოჭას მოძრაობის მიმათულებაც საპირისპიროთი იცვლება. თუ დაჭიმულობის ძალა T და ხახუნის ძალა $F_{ხახ}$ აკმაყოფილებენ პირობას $Tr\leq F_{ხახ}R$, ანუ $T\sin\alpha\leq F_{ხახ}$, $\sin\alpha=r/R$, კოჭა უძრავია. წინააღმდეგ შემთხვევაში კოჭა დაიწყებს ადგილზე ბრუნვას საათის ისრის მიმართულებით.

ვარსკვლავების მოძრაობა: ორი ვარსკვლავი (ამას ვარსკვლავთა ბინარულ სისტემას უწოდებენ) ერთმანეთისგან R მანძილზე იმყოფება და ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას ერთმანეთის მიმართ საერთო ცენტრის გარშემო (ნახ. 4). ვარსკვლავებზე მოქმედებს მხოლოდ მსოფლიო მიზიდულობის ძალა მათი შემაერთებელი წრფის გასწვრივ. აჩვენეთ, რომ: ა)

ვარსკვლავების სრული იმპულსი ინახება; გამოთვალეთ იგი; ბ) ვარსკვლავები მოძრაობისას იმყოფებიან დიამეტრულად საპირისპირო წერტილებში; გ) ისინი მოძრაობენ ერთი და იმავე პერიოდით და გამოთვალეთ ეს პერიოდი; დ) ნაკლები რადიუსის წრეწირზე მოძრავი ვარსკვლავის მასა მეტი უნდა იყოს.



ნახ. 4

ა) ამოცანის პირობის თანახმად, ვარსკვლავების სისტემა ჩაკეტილია, ანუ მასზე არ მოქმედებს გარე ძალა. სისტემა წარმოადგენს ერთმანეთთან მსოფლიო მიზიდულობის ძალით ურთიერთქმედ ორ სხეულს, ამიტომ მათი სრული იმპულსი დროში ინახება და მუდმივი სიდიდეა. ეს მუდმივი სიდიდე კი ნულის ტოლია. მართლაც, ბრუნვითი მოძრაობის დროს თითოეული ვარსკვლავის იმპულსი ცვლადი სიდიდეა და, მაშასადამე, მათი ვექტორული ჯამიც უნდა იცვლებოდეს, რაც წინააღმდეგობაში მოდის იმპულსის მუდმივობის კანონთან. სრული იმპულსის ერთადერთი შესაძლო მნიშვნელობა, რომელიც არ ეწინააღმდეგება მის მუდმივობას, შეიძლება იყოს ნული.

ბ) ამ კითხვაზე პასუხი წინა კითხვის პასუხის შედეგია. მართლაც, რაკი სრული იმპულსი ნულის ტოლია, ვარსკვლავების იმპულსები და, მაშასადამე, მათი სიჩქარეებიც ურთიერთსაპირისპიროდ არიან მიმართულნი, ეს კი შესაძლებელია, თუ ვარსკვლავები იმყოფებიან დიამეტრულად საპირისპირო წერტილებში. გ) ვინაიდან სხეულები დიამეტრულად საპირისპირო წერტილებში იმყოფებიან, ისინი მოძრაობენ ერთი და იმვე ცენტრის გარშემო (ეს ცენტრი არის მათი მასათა ცენტრი) ერთი და იმავე კუთხური სიჩქარით. იმპულსის მუდმივობის გამო მათი სიჩქარეების მოდულები მუდმივი სიდიდეებია. ვთქვათ m_1 მასის მქონე სხეული r_1 რადიუსის წრეწირზეა, ხოლო m_2 მასის სხეული ბრუნავს რადიუსის r_2 წრეწირზე და, ამასთან, $r_1 > r_2$. მაშინ, ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად:

$$G\frac{m_1 m_2}{R^2} = m_1\omega^2 r_{1.}$$

მეორე ვარსკვლავისთვის გვექნება:

$$G\frac{m_1 m_2}{R^2} = m_2\omega^2 r_{2.}$$

ამ ორი განტოლების შეკრებით გამოვთვლით ბრუნვის კუთხურ სიჩქარეს

$\omega=\sqrt{G\frac{m_1+m_2}{R^3}}.$

ბრუნვის პერიოდისთვის მივიღებთ:

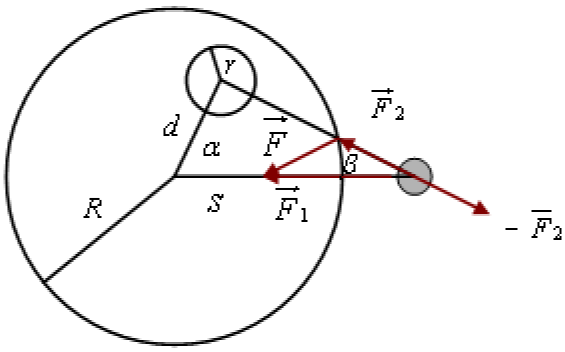
$T = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{G(m_1+m_2)}}.$

დ) იმპულსის მუდმივობის კანონის თანხმად:

$m_1 v_1 = m_2 v_2.$

ვინაიდან მეტი რადიუსის წრეწირზე მოძრავი სხეულის წირითი სიჩქარე მეტია, ცხადია, მისი მასა ნაკლები უნდა იყოს. ამრიგად, $m_2 > m_1$.

მსოფლიო მიზიდულობის ძალა: $R = 0.5$ მ რადიუსის მქონე ტყვიის ბირთვში ამოჭრილია $r = 0.05$ მ რადიუსის მცირე ბირთვი. მათ ცენტრებს შორი მანძილი $d = 0.4$ მ (ნახ. 5). ბირთვის ცენტრიდან $s = 0.8$ მ მანძილზე მოთავსებულია m მასის მქონე სხეული. α კუთხე d მონაკვეთსა და ბირთვის ცენტრისა და სხეულის შემაერთებელი წრფის მონაკვეთს შორის შეადგენს 60^0-ს. იპოვეთ სხეულის მასა, თუ ძალა, რომლითაც ურთიერთქმედებენ ბირთვი და სხეული $F = 5.7\cdot10^{-6}$ ნ, ხოლო ტყვიის სიმკვრივე $\rho = 11.340\cdot10^3$ კგ/მ ^{3}.



ნახ. 5

ტყვიის მთლიან ბირთვსა და სხეულს შორის ურთიერთქმედების ძალა მოქმედებს მათი ცენტრების შემაერთებელი წრფის გასწვრივ. თუ ბირთვში ამოვჭრით r რადიუსის მქონე სფეროს, დარჩენილი ნაწილის სიმძიმის ცენტრი გადაინაცვლებს ბირთვსა და ამოჭრილი სფეროს ცენტრების შემაერთებელი წრფის გასწვრივ. საძიებელი მიზიდულობის ძალა მიმართული იქნება სხეულსა და ბირთვის ახალი სიმძიმის ცენტრის შემაერთებელი წრფის გასწვრივ. ამრიგად, საძიებელია ბირთვის სიმძიმის ახალი ცენტრი.

არსებობს ამოცანის ამოხსნის მეორე გზა. მთლიან ბირთვსა და სხეულს შორის ურთიერთქმედების ძალა აღვნიშნოთ $\vec{F}_1$ -ით, ხოლო ამოჭრილ სფეროსა და სხეულს შორის ურთიერთქმედების ძალა - $\vec{F}_2$-ით. მაშინ საძიებელი ძალა წარმოადგენს ამ ორი ძალის ვექტორულ სხვაობას (ნახაზზე - $\vec{F}$ ძალა). რადგან კუთხე $\alpha = 60^0$, d და s მანძილების თანაფარდობა საშუალებას გვაძლევს დავასკვნათ, რომ მანძილებით შედგენილი სამკუთხედი მართკუთხაა. მაშინ კუთხე $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ვექტორებს შორის შეადგენს $\beta = 30^0$. კოსინუსების თეორემის თანახმად:

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\beta.$$

მიზიდულობის $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალების სიდიდეები შესაბამისად ტოლია:

$$F_1 = \frac{4}{3}G\pi R^3\frac{\rho m}{s^2}, F_2 = \frac{4}{3}G\pi r^3\frac{\rho m}{s^2 - d^2}.$$

ამ ფორმულების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$F = \frac{4}{3}G\pi m\rho\sqrt{\frac{R^3}{s^2} + \frac{r^3}{s^2 - d^2} - 2\frac{R^3r^3}{s^2(s^2 - d^2)}}.$$

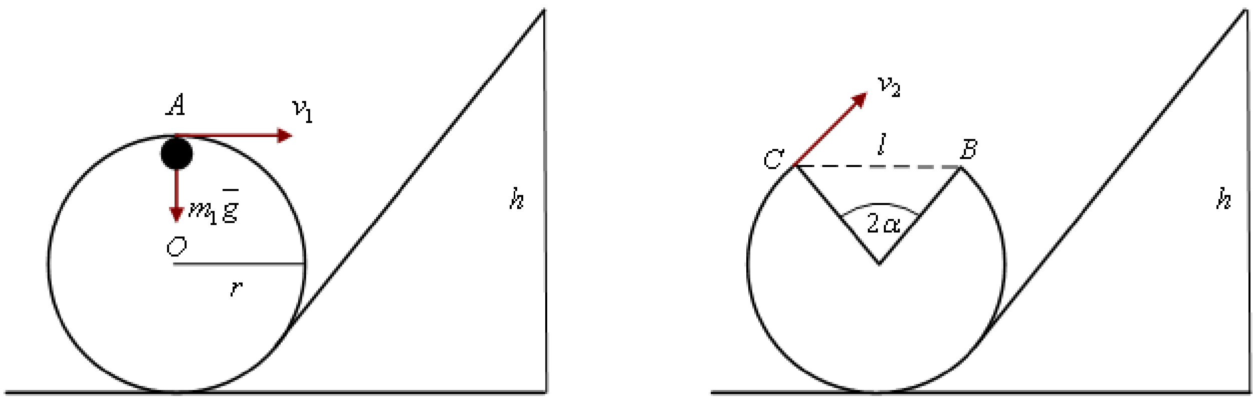
საძიებელი მასისთვის მივიღებთ $m \approx 0.1$ კგ.

ამოჭრილი სფერო ფორმალურად შეიძლება განვიხილოთ როგორც უარყოფითი მასის მქონე სხეული. მაშინ ამ სფეროსა და სხეულს შორის იმოქმედებს განზიდვის ძალა - $\vec{F}_2$. საძიებელი ძალა წარმოადგენს ამ ძალისა და $\vec{F}_1$ ძალის გეომეტრიულ ჯამს. კვლავ კოსინუსების თეორემის გამოყენებით მივიღებთ საძიებელ სიდიდეს.

მკვდარი მარყუჟი. მკვდარი მარყუჟის ფორმის ღარში უხახუნოდ მოძრაობს სხეული. რა მინიმალური h სიმაღლიდან შეიძლება ჩამოსრიალდეს სხეული, მარყუჟის ზედა წერტილიდან

რომ არ ჩამოვარდეს? როგორი α კუთხის შესაბამისი რკალი შეიძლება ამოიჭრას მარყუჟის ზედა წერტილთან სიმეტრიულად, რომ სხეული კვლავ მარყუჟს დაუბრუნდეს? მარყუჟის რადიუსი r=2მ (ნახ. 5).

დახრილ ღარში უხახუნოდ მოსრიალე სხეულზე მარყუჟის უმაღლეს წერტილში მოქმედებს ორი ძალა: რეაქციისა - $\vec{N}$ და სიმძიმისა - $m\vec{g}$ (ნახ. 5). ცხადია, სხეული, იმის მიხედვით, რა სიმაღლიდან ჩამოსრიალდება, მარყუჟის უმაღლეს წერტილს სხვადასხვა სიჩქარით მიაღწევს. მინიმალური ისეთი სიჩქარე, რომ მარყუჟის ზედა წერტილიდან არ ჩამოვარდეს, სხეულს მაშინ ექნება, როდესაც მასზე მოქმედი რეაქციის ძალა გაუტოლდება ნულს.



ნახ. 6

ამ წერტილში სხეული ინერციით გააგრძელებს იმავე სიდიდის სიჩქარით მოძრაობას და როგორც კი გასცდება მას, კვლავ აღიძვრება რეაქციის ძალა. ამრიგად, A წერტილში, ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად:

$$mg = \frac{m\,v_1^2}{r}$$

მექანიკური ენერგიის მუდმივობის კანონის თანახმად, საწყისი პოტენციური ენერგია mgh A წერტილში გადადის კინეტიკური და პოტენციური ენერგიების ჯამში:

$$mgh = \frac{m\,v_1^2}{2} + 2mgr.$$

ამ ორი განტოლების გამოყენებით მივიღებთ, რომ $h = {}^5\!/_2\, r = 5$მ.

ვთქვათ, მარყუჟში ამოჭრილია 2α ცენტრალური კუთხის შესაბამისი რკალი, რომელიც სიმეტრიულია ვერტიკალის მიმართ. იმავე h სიმაღლიდან ჩამოსრიალების შემდეგ სხეული C წერტილს მიაღწევს რაღაც $\vec{v}_2$ სიჩქარით, რომელიც CB ქორდასთან ადგენს α კუთხეს. ამ წერტილიდან სხეული მოძრაობს მხოლოდ სიმძიმის ძალის გავლენით - ფაქტობრივად, ეს ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობაა. ამოცანის პირობის თანახმად სხეული B წერტილში კვლავ მარყუჟს უნდა დაუბრუნდეს. მანძილი, რომელიც უნდა გაიაროს სხეულმა ამ წერტილამდე, არის მისი ფრენის სიშორე და ტოლია:

$$l = \frac{v_2^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

მეორე მხრივ, წერტილი კვლავ დაუბრუნდება მარყუჟს, თუ მანძილი l ტოლი იქნება

$l = 2r\sin\alpha.$

მაშასადამე, $v_2^2 = {}^{gr}/_{\cos\alpha}$. მეორე მხრივ, მექანიკური ენერგიის მუდმივობის კანონის თანახმად:

$$\frac{mv_2^2}{2} = mgh - gr(1 + \cos\alpha).$$

თუ გავიხსენებთ, რომ $h = {}^{5}/_{2}\, r$, მაშინ მივიღებთ შემდეგ კვადრატულ განტოლებას $\cos\alpha$ მიმართ:

$$2\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + 1 = 0,$$

რომელსაც α კუთხისთვის აქვს ორი ამოხსნა: $\alpha_1 = 0$ და $\alpha_2 = 60^0$. ამ ორი ამოხსნიდან ჩვენთვის საინტერესოა მეორე - ცენტრალური კუთხე უდრის 120^0.

---

* ამოცანა შეთავაზებული იყო სასკოლო ოლიმპიადაზე მიმდინარე წელს.