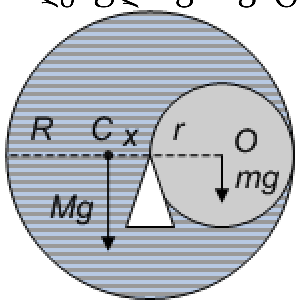
ავთანდილ შურღაია

ფიზიკა ამოცანებში – სტატიკა. 10

(გაგრძელება)სტატიკაში მნიშვნელოვანია ამა თუ იმ სხეულისა თუ სხეულთა სისტემის სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრა. წინა წერილში ჩვენ ერთი ასეთი ამოცანა შემოგთავაზეთ. ახლა გვსურს, განვიხილოთ მეორე ამოცანა, რომელიც არაერთ კრებულშია მოყვანილი და რომლის მაგალითზეც შეიძლება ზოგადი მეთოდის შემუშავება.

ამოჭრილი წრიული ფირფიტის სიმძიმის ცენტრი: R რადიუსის ერთგვაროვან თხელ ფირფიტაში ამოჭრილია წრიული ფორმის დისკო, რომლის რადიუსი $r = R/2$. იპოვეთ მიღებული ფირფიტის სიმძიმის ცენტრი.



ნახ. 1

მთლიანი ფიფრფიტა წარმოვიდგინოთ ორი სხეულისგან შემდგარ სისტემად, რომელთაგან ერთია r რადიუსის დისკო, ხოლო მეორე - ფირფიტა, რომელშიც ეს დისკოა ამოჭრილი. ცხადია, ამ სისტემის სიმძიმის ცენტრია ფირფიტის გეომეტრიული ცენტრი (ნახ. 1-ზე ამ წერტილში საყრდენია). ვთქვათ, ამოჭრილი ფირფიტის სიმძიმის საძიებელი ცენტრი მდებარეობს C წერტილში. r რადიუსის მქონე დისკოს სიმძიმის ცენტრი იქნება მის გეომეტრიულ O ცენტრში. ამოჭრილი ფირფიტის სიმძიმის ძალის მხარი (მანძილი საყრდენიდან C წერტილამდე) აღვნიშნოთ x-ით. მაშინ, მომენტების წესის თანახმად, ფირიფიტა წონასწორობაშია, თუ

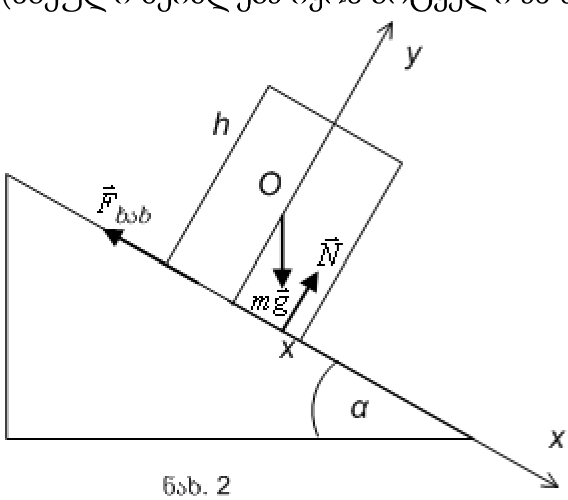
$$Mgx - mgr = 0. \ (1)$$

სადაც M ამოჭრილი ფირფიტის მასაა, ხოლო m - დისკოსი. შემოვიტანოთ დამხმარე სიდიდეები - ფირფიტის სიმკვრივე ρ და სისქე d (თუ ფირფიტის ზედაპირულ სიმკვრივეს შემოვიტანთ, ფირფიტის სისქე საჭირო აღარ არის). მაშინ მასები გამოისახება შემდეგი ფორმულებით:

$$M = 4\pi(R^2 - r^2)d\rho, m = 4\pi r^2 d\rho.$$

თუ ჩავსვამთ მათ (1) ფორმულაში, მივიღებთ განტოლებას x მიმართ, რომლის ამოხსნა იქნება $x = R/6$. მაშასადამე, ფირფიტის სიმძიმის ცენტრი მასში $r = R/2$ რადიუსის დისკოს ამოჭრის შემდეგ გადაინაცვლებს მისი გეომეტრიული ცენტრიდან მარცხნივ $x = R/6$ მანძილზე.

ამოცანაში გამოყენებული მეთოდი ზოგადია. თუ სხეულიდან ამოჭრილია მისი ნაწილი (სხეული შეიძლება იყოს ბრტყელი ან სივრცული), მაშინ დარჩენილი ნაწილის სიმძიმის ცენტრის საპოვნელად მთლიან სხეულს განიხილავენ როგორც ორი სხეულისგან შემდგარ სისტემას და მისთვის გამოიყენებენ მომენტების წესს.



ნახ. 2

ერთგვაროვანი ძელაკი დახრილ სიბრტყეზე: α დახრილობის კუთხის მქონე დახრილ სიბრტყეზე ძევს h სიმაღლის ცილინდრული სხეული, რომლის ფუძის რადიუსია R.

განსაზღვრეთ რეაქციის ძალის მოდების წერტილის მდებარეობა (იხ. ნახ. 2).
ძელაკზე მოქმედებს სიმძიმის, უძრაობის ხახუნის და დახრილი სიბრტყის რეაქციის ძალები. რეაქციის ძალის მოდების წერტილი დახრილობის გამო წანაცვლებულია ისეთი მიმართულებით, რომ ხახუნის ძალა და რეაქციის ძალა ქმნიან ურთიერთსაპირისპიროდ მაბრუნებელ ძალთა მომენტებს ძელაკის სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ბრუნვის ღერძის მიმართ. წონასწორობის პირობის თანახმად, ძელაკზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი ნულის ტოლია. თუ ავირჩევთ ბრუნვის ღერძად სიმძიმის ცენტრზე სიბრტყის მართობულად გამავალ ღერძს, მაშინ ძალთა მომენტების ალგებრული ჯამიც ნულის ტოლი უნდა იყოს ამ ღერძის მიმართ (x-ით აღვნიშნოთ მანძილი რეაქციის ძალის მოდების წერტილიდან ცილინდრის გვერდით ზედაპირამდე):

$$\vec{F}_{ხახ} + \vec{N} + m\vec{g} = 0, F_{ხახ} h/2 - N(R-x) = 0.$$

პირველი განტოლება გეგმილებში ასე გამოიყურება:

$$\begin{cases} -F_{ხახ} + mg\sin\alpha = 0, \\ N - mg\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

მეორე განტოლება ამ სისტემასთან ერთად იძლევა შემდეგ ამონახსნს:

$$x = R - \frac{h}{2}\tan\alpha. (2)$$

გავაანალიზოთ მიღებული შედეგი. დახრილობის კუთხის ნულოვანი მნიშვნელობისთვის $x = R$ და რეაქციის ძალა მოდებული იქნება ცილინდრის ფუძის ცენტრში. დახრილობის კუთხის ზრდასთან ერთად x მცირდება და რეაქციის ძალის მოდების წერტილი თანდათან გადაინაცვლებს ცილინდრის გვერდითი ზედაპირისკენ. რეაქციის ძალა იმოქმედებს ამ ზედაპირის გასწვრივ, თუ დახრილობის კუთხის ზღვრული მნიშვნელობა α_0, როდესაც ცილინდრი ჯერ კიდევ წონასწორობაშია, დააკმაყოფილებს პირობას

$\tan\alpha_0 = \frac{2R}{h}$. (3)

ამ დროს სიმძიმის ძალის მოქმედების წრფე გადის დახრილი სიბრტყისა და ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის შეხების წერტილზე (რეაქციის ძალის მოდების წერტილზე). ცილინდრზე მოქმედი სამივე ძალის მომენტი ამ წერტილზე გამავალი ბრუნვის ღერძის მიმართ ამ დროს ნულის ტოლია. დახრილობის კუთხის შემდგომი გაზრდით x-ის განმსაზღვრელ განტოლებას აზრი ეკარგება (x უარყოფითი ხდება, რაც დაუშვებელია, რადგან x მანძილია. ეს კი ნიშნავს , რომ წონასწორობის პირობა ირღვევა). ამ დროს თუ ხახუნის კოეფიციენტი ისეთია, რომ აჭარბებს $\tan\alpha$, სხეული გადატანით მოძრაობას ვერ შეასრულებს, მაგრამ დახრილი სიბრტყის და ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის შეხების წერტილში გამავალი ბრუნვის ღერძის მიმართ სიმძიმის ძალას გაუჩნდება არანულოვანი ბრუნვის მომენტი, რადგან მისი მოქმედების წრფე გავა ცილინდრის ფუძის გარეთ (ბრუნვის ღერძზე აღარ გაივლის), ამიტომ სხეული ამ ღერძის მიმართ სიმძიმის ძალის გავლენით დაიწყებს ბრუნვას და იგი გადაყირავდება. კუთხის მნიშვნელობა, რომლის დროსაც ეს მოხდება, დამოკიდებულია ცილინდრის გეომეტრიულ ზომებზე - რაც მეტია მისი სიმაღლე და ნაკლებია ფუძის რადიუსი, მით ნაკლებია (3) ტოლობით განსაზღვრული კუთხის მნიშვნელობა.

მასათა ცენტრი და სიმძიმის ცენტრი. მასათა ცენტრს ხშირად ვაიგივებთ სიმძიმის ცენტრთან, მაგრამ ეს, საზოგადოდ, სამართლიანი არ არის. ეს გახლავთ ორი განსხვავებული ცნება, თუმცა ეს ცენტრები ხშირად ერთმანეთს ემთხვევა. მასათა

ცენტრი არის ის წერტილი, რომელშიც შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ თავმოყრილია სისტემის მთელი მასა. მასათა ცენტრის კოორდინატები მოცემულ კოორდინატთა სისტემაში განისაზღვრება სისტემის შემადგენელი ნაწილების რადიუს-ვექტორების მათი მასებით შეწონილი საშუალო მნიშვნელობით.

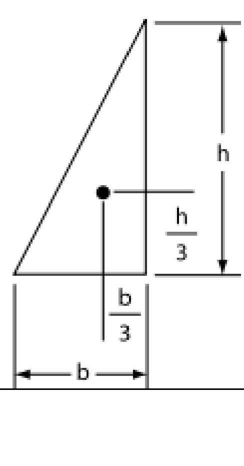
$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \cdots + \vec{r}_n m_n}{m_1 + \cdots + m_n}.$$

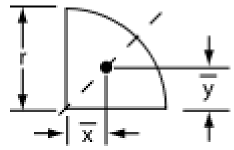
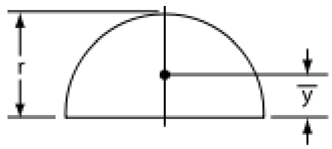
თუ კოორდინატთა სისტემის სათავეს მოვათავსებთ მასათა ცენტრში, მაშინ

$$\vec{r}_1 m_1 + \cdots + \vec{r}_n m_n = 0.$$

გარდა ამისა, მასათა ცენტრი არის ის წერტილი, რომელშიც იკვეთება წრფეები, რომელთა გასწვრივ მოქმედი ძალები სხეულს გადატანით მოძრაობას ანიჭებს.

სიმძიმის ცენტრი შეიძლება ასე განვმარტოთ. თუ სისტემის შემადგენელ სხეულებზე მოქმედ სიმძიმის ძალებს შევკრებთ, მაშინ მათი ტოლქმედი მოდებული იქნება სისტემის სიმძიმის ცენტრში. თუ სხეულისთვის ან სხეულთა სისტემისთვის გრავიტაციული ველი შეიძლება ჩაითვალოს ერთგვაროვნად, მაშინ სიმძიმის ცენტრი ემთხვევა მასათა ცენტრს. წინააღმდეგ შემთხვევაში სიმძიმის ცენტრი მცირეოდენ წანაცვლებულია მასათა ცენტრის მიმართ. ყოველდღიურ ცხოვრებაში ჩვენ პრაქტიკულად ვაწყდებით ერთგვაროვანი გრავიტაციული ველის მიახლოებას, ამიტომ ვთვლით, რომ ეს ორი ცენტრი ერთმანეთს ემთხვევა. მასათა ცენტრის პოვნაში ხშირად გვეხმარება ამა თუ იმ სხეულის სიმეტრიის თვისებები და მათი ერთგვაროვნება. თუ სხეული ერთგვაროვანია, მისი მასათა ცენტრი/სიმძიმის ცენტრი ემთხვევა მის გეომეტრიულ ცენტრს. მაგალითად, ბრტყელი მართკუთხა ფორმის სხეულის მასათა ცენტრი/სიმძიმის ცენტრი ემთხვევა დიაგონალების გადაკვეთის წერტილს, სფერული სხეულისა - მის ცენტრს, ხოლო სამკუთხედისა - მისი მედიანების გადაკვეთის წერტილს. მოვიყვანთ კიდევ რამდენიმე ბრტყელი სხეულის გეომეტრიული ცენტრის კოორდინატებს.

	გეომეტრიული სხეული	გეომეტრ. ცენტრის $\bar{x}$ კოორდინატი	გეომეტრ. ცენტრის $\bar{y}$ კოორდინატი
მართკუთხა სამკუთხედი		$\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$

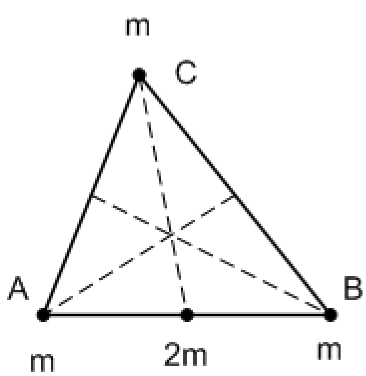
მეოთხედი წრე		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$
ნახევარწრე		0	$\frac{4r}{3\pi}$

ბრტყელი ასიმეტრიული ერთგვაროვანი სხეულის გეომეტრიული ცენტრის კოორდინატების საპოვნელად ზოგიერთ შემთხვევაში შეიძლება ვისარგებლოთ შემდეგი მეთოდით. სხეული უნდა დავყოთ სიმეტრიულ ნაწილებად (თუ ეს შესაძლებელია), რომელთა გეომეტრიული ცენტრები ცნობილია. მასათა ცენტრის ზემოთ მოყვანილ ფორმულაში მასები გამოვსახოთ სხეულის სიმკვრივის, ზედაპირის ფართობისა და სხეულის სისქის საშუალებით (შეიძლება აგრეთვე ფორმალურად შემოვიტანოთ მასის ზედაპირული სიმკვრივე და მასა შევცვალოთ ამ სიმკვრივისა და შესაბამისი ზედაპირის ფართობის ნამრავლით). სხეულის სიმკვრივისა და სისქის შეკვეცის შემდეგ დაგვრჩება შემდეგი ფორმულა:

$R = \frac{x_1S_1+\cdots x_nS_n}{S_1+\cdots+S_n}$, (4)

სადაც S_k და x_k შესაბამისად თითოეული ნაწილის ფართობი და გეომეტრიული ცენტრის კოორდინატია არჩეულ კოორდინატთა სისტემაში.

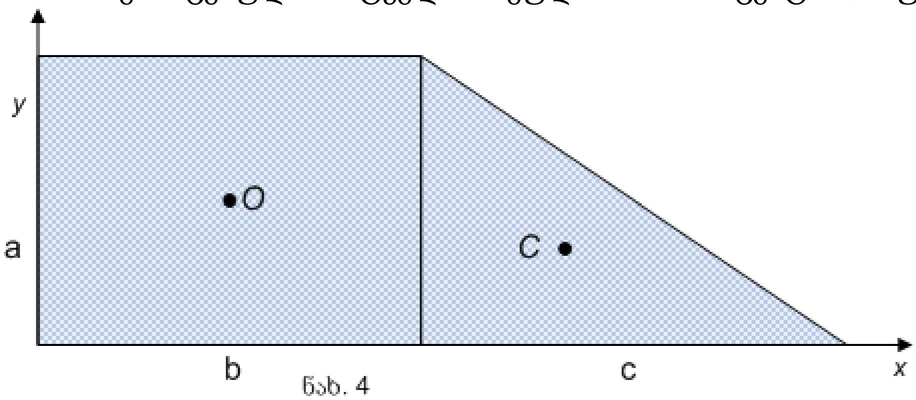
სამკუთხედის მასათა ცენტრი: სამკუთხედის წვეროებში მოთავსებულია ტოლი m მასის ბურთულები (ნახ. 3). იპოვეთ ამ სისტემის მასათა ცენტრი.



ნახ. 3

სამივე ბურთულის მასათა ცენტრის პოვნით ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ სამკუთხედის გეომეტრიული ცენტრი მდებარეობს მედიანების გადაკვეთის წერტილში, რომელიც მედიანებს ყოფს თანაფარდობით 1:2. მართლაც, A და B წვეროებში მოთავსებული ბურთულების მასათა ცენტრი იქნება AB გვერდის ცენტრში, სადაც თავმოყრილი იქნება $2m$-ის ტოლი მასა. ახლა ვიპოვოთ ამ უკანასკნელისა და C წერტილში მოთავსებული m მასის ბურთულის სიმძიმის ცენტრი. რადგან მათი მასები ორჯერ განსხვავებულია, მათი მხრებიც ორჯერ განსხვავდება ერთმანეთისგან, რაც იმას ნიშნავს, რომ სიმძიმის ცენტრი C წერტილიდან გავლებულ მედიანას ყოფს თანაფარდობით 1:2. იმავე მსჯელობით BC და AC გვერდების მიმართ მივალთ დასკვნამდე, რომ სისტემის ცენტრი მდებარეობს მედიანების გადაკვეთის წერტილში და ეს უკანასკნელი მედიანას ყოფს თანაფარდობით 1:2.

მასათა ცენტრი: იპოვეთ ნახ. 4-ზე მოცემული ბრტყელი სხეულის მასათა ცენტრი, თუ $a = 6, b = 8, c = 9$.



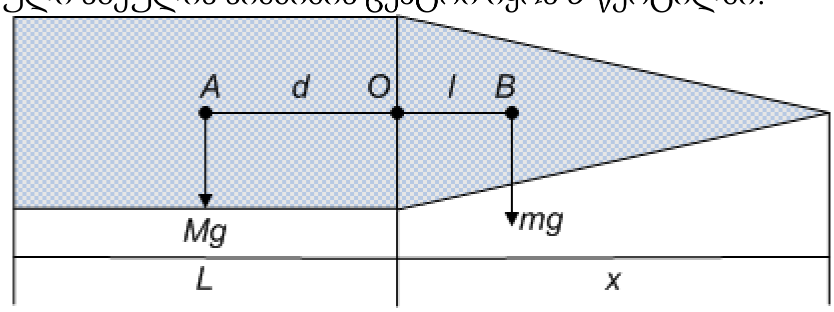
ნახ. 4

მასათა ცენტრის კოორდინატების საპოვნელად ვისარგებლოთ ზემოთ მოყვანილი მეთოდით. მოცემული სხეული გავყოთ ორ ნაწილად, რომელთაგან ერთი მართკუთხედია, ხოლო მეორე - მართკუთხა სამკუთხედი. არჩეულ კოორდინატთა სისტემაში მართკუთხედის მასათა ცენტრის O კოორდინატებია: $x_o = b/2 = 4, y_o = a/2 = 3$. სამკუთხედის მასათა ცენტრის C კოორდინატებია $x_c = b + c/3 = 11$, $y_c = a/3 = 2$, ხოლო მათი ფართობებია $S_o = ab = 48$, $S_c = ac/2 = 27$. მასათა ცენტრის X და Y კოორდინატებისთვის ზემოთ მოყვანილი (4) ფორმულის შესაბამისად მივიღებთ:

$$X = \frac{x_o S_o + x_c S_c}{S_o + S_c} = 6.52, Y = \frac{y_o S_o + y_c S_c}{S_o + S_c} = 2.64.$$

ამრიგად, მოცემული სხეულის მასათა ცენტრი (იგივე სიმძიმის ცენტრი) მდებარეობს O ცენტრიდან მარჯვნივ და ოდნავ ქვევით.

სიმძიმის ცენტრი: როგორი თანაფარდობა უნდა იყოს x და d სიდიდეებს შორის, რომ ნახ. 5-ზე მოცემული სხეულის სიმძიმის ცენტრი იყოს O წერტილში?



ნახ. 5

ნახაზზე მოცემული სხეული წარმოადგენს მართკუთხედისა და ტოლფერდა სამკუთხედის ერთობლიობას. მათი სიმძიმის ცენტრები მოთავსებულია A და B წერტილებში. მომენტების წესის თანახმად,

$$Mgd - mgl = 0.$$

შემოვიტანოთ ფირფიტის ზედაპირული სიმკვრივე ρ. მაშინ ეს ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\rho S_1 d - \rho S_2 l = 0.$$

სადაც S_1 და S_2 შესაბამისად მართკუდხედისა და სამკუთხედის ფართობებია. აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $d = L/2, l = x/3$, $S_1 = La, S_2 = xa/3$, მივიღებთ:

$$x/L = \sqrt{3}.$$

გაჭიმული თოკი: შესაძლოა თუ არა, m მასის თოკი გაიჭიმოს ისე, რომ მან ზუსტად ჰორიზონტალური მდგომარეობა მიიღოს?
ეს შეუძლებელია შემდეგი მიზეზის გამო. დაჭიმული თოკის სიმძიმის ცენტრზე იმოქმედებს ვერტიკალურად ქვევით მიმართული სიმძიმის ძალა, რომელიც აუცილებლად მოითხოვს მის საპირისპიროდ მიმართული და სიდიდით მისი ტოლი ძალის არსებობას. ასეთი ძალა შეიძლება იყოს მხოლოდ თოკის სიმძიმის ცენტრზე ორივე მხრიდან მოდებული დაჭიმულობის ძალების ტოლქმედი. თუ თოკი დაიჭიმება ზუსტად ჰორიზონტალურად, მაშინ დაჭიმულობის ძალებს არ ექნება ვერტიკალური მდგენელი და სიმძიმის ძალის გაწონასწორებაც ვერ მოხდება.