ავთანდილ შურღაია

ფიზიკა ამოცანებში

(ელექტროსტატიკა - მუხტი, ელექტრული ველი)

წინამდებარე წერილით ვიწყებთ ამოცანების განხილვას ელექტროსტატიკაში. ელექტროსტატიკის ძირითად კანონს, მოგეხსენებათ, წარმოადგენს უძრავი მუხტების ურთიერთქმედების კანონი - კულონის კანონი. ორი უძრავი წერტილოვანი მუხტი ერთმანეთთან ურთიერთქმედებს ძალით, რომლის სიდიდე ამ მუხტების სიდიდეების პირდაპირპროპორციულია და მუხტებს შორის მანძილის უკუპროპოციული;

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{1}$$

ეს ძალა მიმართულია მუხტების შემაერთებელი წრფის გასწვრივ - საპირისპირო ნიშნის მუხტები მიიზიდავენ ერთმანეთს, ხოლო ერთნაირნიშნიანი მუხტები განიზიდავენ. ერთეულთა საერთაშორისო SI სისტემაში კოეფიციენტი $k = 9\cdot10^9$ ნმ^2 / კ^2 . მისი ფიზიკური არსი მდგომარეობს იმაში, რომ იგი რიცხობრივად ტოლია ერთეული მანძილით დაშორებულ ორ ერთეულოვან წერტილოვან მუხტს შორის ურთიერთქმედების ძალის. ამ მუდმივას რიცხვითი მნიშვნელობა SI სისტემაში განსაზღვრულია ძირითადი ერთეულის ამპერის განმარტებით, კერძოდ $k = 10^{-7}c^2$ ჰნ / მ. აქ c არის სინათლის სიჩქარე ვაკუუმში. ელექტრობაში განმარტებულია აგრეთვე სხვა მუდმივა - ვაკუუმის ელექტრული შეღწევადობა $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi k}$.

ε დიელექტრიკული შეღწევადობის მქონე გარემოში ურთიერთქმედების ძალა მცირდება ε-ჯერ და ტოლი იქნება

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}.$$

დამუხტული სხეულები გარემოს ანიჭებენ განსაკუთრებულ თვისებებს - ქმნიან ელექტრულ ველს. ელექტრულ ველს ახასიათებენ ძალური და ენერგეტიკული მახასიათებლებით. კერძოდ, ელექტრული ველის დაძაბულობა $\vec{E}$ ტოლია ერთეულოვან დადებით საცდელ მუხტზე მოქმედი ძალის. წერტილოვანი მუხტის ელექტრული ველის დაძაბულობა მისგან r მანძილზე გამოითვლება ფორმულით:

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2}.$$

ელექტრული ველის ენერგეტიკულ მახასიათებელს ეწოდება პოტენციალი, რომელიც განიმარტება როგორც მუშაობა, რომელსაც შეასრულებს ელექტრული ველი ერთეულოვანი დადებითი მუხტის გადასატანად ველის მოცემული წერტილიდან წერტილში, სადაც პოტენციალი ნულის ტოლი იქნება. ფიზიკური აზრი აქვს არა პოტენციალის აბსოლუტურ სიდიდეს, არამედ პოტენციალთა სხვაობას. ეს აიხსნება იმ ფაქტით, რომ ელექტრული ველის მიერ შესრულებული მუშაობა დამოკიდებული არ არის ტრაექტორიის ფორმაზე, სიგრძეზე და დამოკიდებულია მხოლოდ გადაადგილების საწყის და საბოლოო წერტილებზე (ამ აზრით სრულ ანალოგიას აქვს ადგილი სიმძიმის ძალის ველთან). ელექტრული ველის მიერ V_1 პოტენციალის წერტილიდან V_2 პოტენციალის წერტილში q წერტილოვანი მუხტის გადატანაზე შესრულებული მუშაობა ტოლია $A=q(V_1-V_2)$. წერტილოვანი მუხტის შემთხვევაში ნულოვანი პოტენციალის მქონე წერტილად მიღებულია მუხტისგან უსასრულოდ დაშორებული წერტილი. მაშინ ასეთი მუხტის პოტენციალი მისგან r მანძილით დაშორებულ წერტილში გამოითვლება ფორმულით:

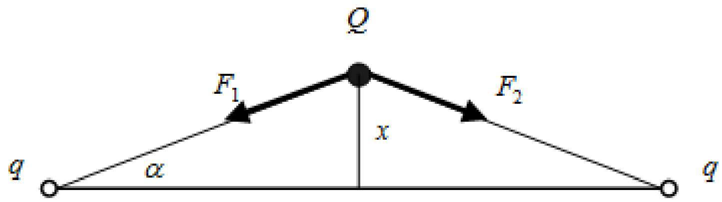
$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r}.$$

ელექტრული ველის გრაფიკული გამოსახვისთვის იყენებენ ელექტრული ველის ძალწირების ცნებას, ასევე შემოაქვთ ეკვიპოტენციალური ზედაპირის ცნება. ველის ძალწირები წარმოადგენენ ეკვიპოტენციალური ზედაპირის მართობულ წირებს. ეკვიპოტენციალური ზედაპირის ყოველ წერტილში პოტენციალს აქვს ერთი და იგივე მნიშვნელობა და ასეთი ზედაპირის გასწვრივ მუხტის გადაადგილებაზე შესრულებული მუშაობა უდრის ნულს. აქვე მოვიყვანთ ერთმანეთისგან r მანძილით დაშორებული ორ წერტილოვანი მუხტის ურთიეთქმედების პოტენციური ენერგიის ფორმულას:

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{\varepsilon r}.$$

აქ მუხტები აღებულია თავისივე ნიშნით.

ჰარმონიულად მერხევი მუხტი: l მანძილით დაშორებულ ორ წერტილოვან q მუხტს შორის შუაში მოათავსეს მესამე უარყოფითი Q მუხტი, რომლის მასა არის m ეს უკანასკნელი მცირედ გადახარეს ჰორიზონტალურ სიბრტყეში მუხტების შემაერთებელი წრფის მართობული მიმართულებით (ნახ. 1). გამოთვალეთ მისი რხევის პერიოდი.



ნახ. 1

მცირე x მანძილით გადახრილ Q მუხტზე ორივე q მუხტი იმოქმედებს ერთი და იგივე სიდიდის ძალით: $F_1 = F_2 \equiv F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qQ}{(l/2)^2}$. . თუ საკოორდინატო ღერძს ავირჩევთ ვერტიკალურად ზევით, მაშინ ნიუტონის მეორე კანონს ექნება შემდეგი სახე (აჩქარებას და გადაადგილებას აქვთ ურთიერთსაპირისპირო ნიშანი):

$$ma = -2F\sin\alpha\,.$$

რადგან გადახრის კუთხე მცირეა, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx 2x/l.$ ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით ნიუტონის მეორე კანონი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$a = -\frac{4F}{ml}x.$$

ეს არის ჰარმონიული რხევის განტოლება, რომლის ციკლური სიხშირეა

$$\omega = \sqrt{\frac{4F}{ml}}.$$

კულონის კანონის გათვალისწინებით რხევის პერიოდისთვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$T = \pi l\sqrt{\pi l m\varepsilon_0 / qQ}.$$

თანაბრად დამუხტული სფეროს ელექტრული ველის დაძაბულობა: R რადიუსის მქონე სფეროს შიგნით გვაქვს მუდმივი ρ სიმკვრივის მქონე მოცულობითი მუხტი. იპოვეთ მუხტის ელექტრული ველის დაძაბულობა სფეროს შიგნით და მის გარეთ, როგორც სფეროს ცენტრიდან მანძილის ფუნქცია. ააგეთ შესაბამისი გრაფიკი.

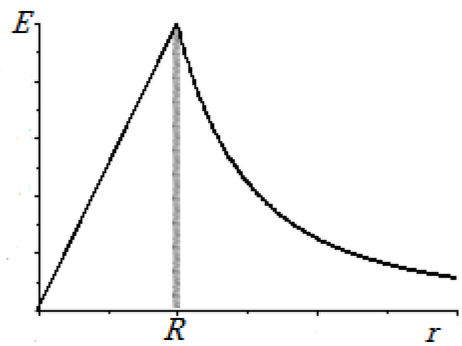
სფეროს მუხტის ელექტრული ველის დაძაბულობა იგივეა, რაც სფეროს ცენტრში მოთავსებული ასეთივე მუხტის ელექტრული ველის დაძაბულობა. სფეროს გარეთ მუხტი არ ახდენს გავლენას სფეროს შიგნით არსებული ველის დაძაბულობაზე. სფეროს შიგნით მუხტი იცვლება ცენტრიდან მანძილის მიხედვით. ამიტომ ცენტრიდან $r < R$ მანძილზე ველის დაძაბულობა იქნება

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{3}\frac{\pi r^3 \rho}{r^2} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

ამრიგად, სფეროს შიგნით დაძაბულობა იცვლება ცენტრიდან მანძილის მიხედვით წრფივად. სფეროს გარეთ ცენტრიდან $r > R$ მანძილზე ველის დაძაბულობა ტოლია

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2},$$

სადაც q არის სფეროს მთლიანი მუხტი. ველის დაძაბულობის გრაფიკი მოცემულია ნახ. 2-ზე.



ნახ. 2

მუხტების ურთიერთქმედება: ერთ წრფეზე მოთავსებულია სამი მუხტი: ერთი დადებითი $+q$ მუხტი და ორი უარყოფითი $-Q$ მუხტი. მუხტების სიდიდეების რა თანაფარდობისთვის იქნება ამ მუხტების სისტემა წონასწორობაში? არის თუ არა წონასწორობა მდგრადი? დახაზეთ თითოეული მუხტის პოტენციური ენერგიის გრაფიკი იმ პირობით, რომ დანარჩენი ორი გაჩერებულია.

მუხტები შეიძლება განლაგებული იყოს ისე, რომ ორივე უარყოფითი იყოს დადებითი მუხტისგან რომელიმე ერთ მხარეს ან დადებითი იყოს უარყოფით მუხტებს შორის. პირველ შემთხვევაში დადებით მუხტზე ორივე უარყოფითი მუხტი იმოქმედებს ერთი და იგივე მიმართულები ძალით და წონასწორობა არ გვექნება. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც დადებითი მუხტი მოთავსებულია უარყოფითებს შორის. დადებითი მუხტის წონასწორობისთვის აუცილებელია, რომ ის თანაბარი მანძილებით იყოს დაშორებული უარყოფითი მუხტებისგან. ამ შემთხვევაში წონასწორობის პირობას რომელიმე ერთი უარყოფითი მუხტისთვის აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 r^2} = 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ უარყოფითი მუხტები იქნება წონასწორობაში, თუ $Q = 4q$. სისტემა იქნება წონასწორობაში, მაგრამ წონასწორობა არ იქნება მდგრადი. მართლაც, წავანაცვლოთ ერთ-ერთი უარყოფითი მუხტი დადებითისკენ x მანძილით $(x \le r)$. მაშინ მასზე მოქმედი ტოლქმედი ძალა F არ იქნება ნულის ტოლი, მეტიც მიზიდვის F_{qQ} ძალა გადააჭარბებს განზიდვის F_{QQ} ძალას და უარყოფითი მუხტი ვეღარ დაბრუნდება უკან:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4(r-x)^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(2r-x)^2} > 0.$$

თუ რომელიმე უარყოფით მუხტს დავაშორებთ დადებით მუხტს x მანძილით, მაშინ განზიდვა გადააჭარბებს მიზიდვას და სისტემა კვლავ ვეღარ დაბრუნდება წონასწორობის მდგომარეობაში:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4(r+x)^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(2r+x)^2} < 0.$$

თუ დადებით მუხტს წავანაცვლებთ რომელიმე მხარეს x მანძილზე ვნახავთ, რომ ტოლქმედი ძალა მიმართული იქნება დადებითი მუხტის წანაცვლების მიმართულებით და სისტემა ვეღარ დაბრუნდება წონასწორობაში.

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(r+x)^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(r-x)^2} < 0.$$

როგორც ვხედავთ ყველა განხილულ შემთხვევაში ტოლქმედი ძალა მიმართული იქნება წონასწორობის მდებარეობის საპირისპიროდ და მაშასადამე წონასწორობა არამდგრადია.

1. უარყოფითი მუხტის ურთიერთქმედების ენერგია დანარჩენ ორთან იმ პირობით, რომ ეს უკანასკნელი ორი უძრავია:

   $$U_1 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{x} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{x+r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4x} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{x+r}.$$

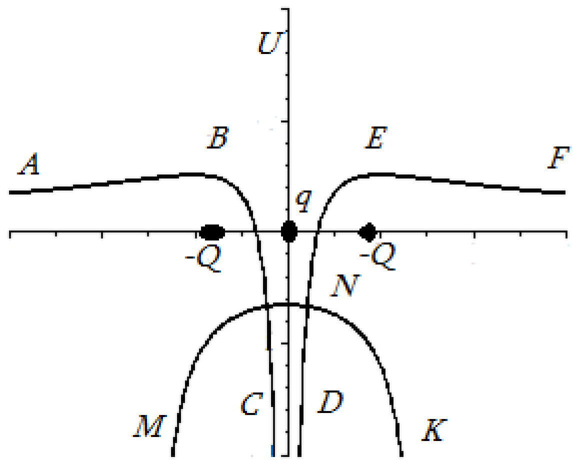
   აქ x არის მანძილი დადებით და ერთ-ერთ უარყოფით მუხტს შორის;

2. დადებითი მუხტის ურთიერთქმედების ენერგია დანარჩენ ორთან იმ პირობით, რომ ეს უკანასკნელი ორი უძრავია:

   $$U_1 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{x+r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{x-r} = -\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0}\frac{r}{r^2 - x^2}.$$

   აქ x არის დადებითი მუხტის წანაცვლება წონასწორობის მდებარეობიდან.

ამ ენერგიების გრაფიკები მოცემულია ნახ. 3-ზე.



ნახ. 3

გრაფიკის ABC და DEF შტოები შეესაბამება ერთ-ერთი უარყოფითი მუხტის ურთიერთქმედების ენერგიას დადებით და მეორე უარყოფით მუხტებთან, ხოლო MNK შტო - დადებითი მუხტის ურთიერთქმედების ენერგიას უარყოფით მუხტებთან. შევნიშნავთ, რომ ენერგიებს მაქსიმუმები აქვთ წონასწორობის მდგომარეობაში. ეს კი შეესატყვისება არამდგრად მდგომარეობას.

დამუხტული რგოლის ელექტრული ველი. R რადიუსის რგოლი დამუხტულია თანაბრად Q მუხტით. იპოვეთ ელექტრული ველის დაძაბულობა და პოტენციალი რგოლის ცენტრში და რგოლის ცენტრზე რგოლის სიბრტყის მართობულად გამავალ ღერძზე ცენტრიდან L მანძილზე.

დავყოთ რგოლი მცირე ელემენტებად, რომელთაც გააჩნიათ ერთნაირი მცირე Δq მუხტი. თითოეული ამ ელემენტის მიერ რგოლის ცენტრში შექმნილი პოტენციალი ტოლი იქნება

$$\Delta\varphi_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q}{R}.$$

სრული პოტენციალი ცენტრში წარმოადგენს ელემენტარული მუხტების პოტენციალთა ჯამს. რადგან ყველა ელემენტი თანაბრად არის დაშორებული ცენტრიდან, სრული პოტენციალისთვის მივიღებთ:

$$\varphi_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}.$$

რგოლის სიბრტყის მართობზე ცენტრიდან L მანძილზე თითოეული ელემენტი ქმნის პოტენციალს

$$\Delta\varphi_L = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q}{(R^2+L^2)^{1/2}}.$$

ამ პოტენციალების ჯამი კი წარმოადგენს სრულ პოტენციალს რგოლის ცენტრიდან L მანძილზე:

$$\varphi_L = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(R^2+L^2)^{1/2}}.$$

ანალოგიურად გამოითვლება ველის დაძაბულობაც. ვინაიდან ველის დაძაბულობა ვექტორულად იკრიბება, რგოლის ცენტრში სრული დაძაბულობა $E_c = 0$, რადგან ყოველი ორი დიამეტრალურად განლაგებული ელემენტი ქმნის ურთიერთსაპირისპირო და მოდულით ტოლ დაძაბულობებს. რგოლის სიბრტყის მართობულ ღერძზე დაძაბულობის გამოთვლისას გავითვალისწინოთ, რომ ყოველი ელემენტის დაძაბულობას აქვს ღერძის მართობული მდგენელი, რომელიც გაბათილდება დიამეტრალურად საწინააღმდეგო ელემენტის დაძაბულობის ანალოგიური მდგენლით. ღერძის გასწვრივ თითოეული ელემენტის დაძაბულობის მდგენელი ტოლია

$$\Delta E_L = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q\cos\beta}{(R^2+L^2)},$$

სადაც $\cos\beta = \dfrac{L}{(R^2+L^2)^{1/2}}$. ამ მდგენლების აჯამვის შედეგად საძიებელი დაძაბულობის (იგი მიმართული იქნება ღერძის გასწვრივ) სიდიდისთვის მივიღებთ:

$$E_L = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qL}{(R^2+L^2)^{3/2}}.$$