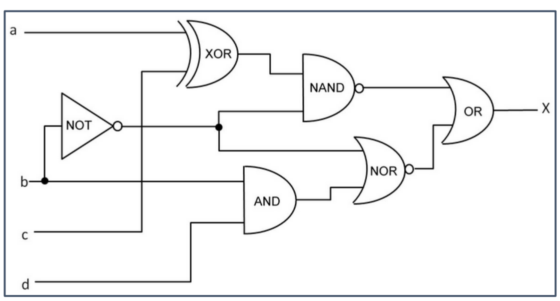
დამტკიცება და დამტკიცების ხერხები მათემატიკაში

მათემატიკაში დამტკიცება არის ***დედუქციური*** მსჯელობა, რომელიც გამოიყენება გამონათქვამის დასაბუთებისათვის. ამგვარი მსჯელობის დროს შესაძლებელია უკვე არსებული, ადრე დასაბუთებული დებულებების გამოყენება. სურვილის შემთხვევაში, შესაძლებელია რომ დამტკიცებისას გამოყენებულ მსჯელობას მივყვეთ უკუსვლით იქამდე სანამ არ მივადგებით ისეთ საწყის დებულებებს, რომელთა ჭეშმარიტება თავისთავად ცხადია ან რომლებიც მიჩნეულია როგორც ჭეშმარიტი დებულებები. ისეთ საწყის დებულებებს კი, რომლებიც დამტკიცების გარეშეა მიღებული როგორც ჭეშმარიტი დებულებები, ***აქსიომები*** ეწოდება.

მათემატიკაში დამტკიცებები მკაცრად ემორჩილება ფორმალური ლოგიკის კანონებს, მაგრამ, როგორც წესი ჩამოყალიბებულია ჩვეულებრივი ***სასაუბრო ენის*** წინადადებების საშუალებით. წმინდა ფორმალური დამტკიცებები, რომლებიც იყენებს სიმბოლურ ენას სასაუბრო ენის ნაცვლად, განიხილება მათემატიკის, ფილოსოფიური ლოგიკის და კომპიუტერული მეცნიერების ერთ-ერთ მიმართულებაში, რომელსაც ***დამტკიცების თეორია*** ეწოდება. ამ თეორიის ერთ-ერთი მიზანია ისეთი ინტერაქტიული კომპიუტერული სისტემების შექმნა, რომელთა დახმარებითაც შესაძლებელია დამტკიცების ანალიზი, მაგალითად ამ დამტკიცების სისწორის შემოწმების მიზნით ან რომელიმე დებულების დამტკიცების მოძებნა. როგორც წესი, არსებული დამტკიცების სისწორის შემოწმება უფრო მარტივია, ვიდრე ახალი დამტკიცების მოძებნა. ეს უკანასკნელი, ფორმალური ლოგიკის გარდა ხშირად მოითხოვს ***ინტუიციას*** და ***შემოქმედებითობას****.* ამიტომ, შეიძლება ითქვას, რომ მათემატიკური დამტკიცება თავის თავში აერთიანებს როგორც ***ანალიზს*** ასევე ***სინთეზს****.*



დამტკიცების თეორიაში დამტკიცებები განიხილება, როგორც ინდუქციურად განსაზღვრული მონაცემთა სტრუქტურები. აქსიომები არ განიხილება როგორც ***ყოველთვის ჭეშმარიტი დებულებები***. აქსიომების ცვლილებით შესაძლებელია სხვადასხვა თეორიების აგება. ეს მიდგომა და მისი შედეგები ვლინდება არა მხოლოდ მათემატიკაში (მაგ., ევკლიდური და არაევკლიდური გეომეტრიები), არამედ თეორიულ ფიზიკაშიც (მაგ., კლასიკური მექანიკა და ფარდობითობის თეორია), რომელშიც საწყისი დებულებების ცვლილებით მიიღება სამყაროს აღწერის განსხვავებული მოდელი.

ამ შემთხვევაში, ჩვენი მიზანია ყურადღება გავამახვილოთ დამტკიცების ზოგიერთ ხერხზე, რომლებიც ხშირად გამოიყენება და მათ კავშირზე ფორმალურ - ლოგიკურ კანონებთან. ეს

განსაკუთრებით მნიშვნელოვნად მიგვაჩნია იმის გამო, რომ სასკოლო მათემატიკის კურსის ერთ-ერთი მთავარი მიზანია მსჯელობისა და დასაბუთების ხერხების დაუფლება. ხოლო ამ ხერხების ამოცნობა მსჯელობისას და მათი გაცნობიერებულად გამოყენება ხელს შეუწყობს მათი გამოყენების უნარის განვითარებას.

დამტკიცების ხერხები

პირდაპირი დამტკიცება

პირდაპირი დამტკიცება არის დამტკიცების ისეთი ხერხი, რომლის დროსაც დებულების დასაბუთება ხდება აქსიომების, განსაზღვრებების და უკვე ცნობილი დებულებების ლოგიკური კომბინირების გზით.

როგორც წესი დამტკიცების ეს ხერხი გამოიყენება ***"თუ p მაშინ q"***, ***"p - დან გამომდინარეობს q"*** სახის დებულებების დამტკიცების დროს. დამტკიცების ხერხი მდგომარეობს იმაში, რომ თავი მოვუყაროთ იმ ფაქტებს, რომლებიც ვიცით p დებულების შესახებ და რომლებიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს q დებულების ჭეშმარიტება. მაგალითად, "***როდესაც n კენტი რიცხვია, მაშინ n^2 ასევე კენტი რიცხვია***". ამ შემთხვევაში p არის წინადადება - "n კენტი რიცხვია", ხოლო q - "n^2 კენტი რიცხვია". $p \Longrightarrow q$ გამონათქვამის დასამტკიცებლად საკმარისია ალგებრულად ჩაიწეროს ის ფაქტი რომ n არის კენტი: $n = 2k + 1$, რომელიღაც არაუარყოფითი მთელი k - სათვის. ამის შემდეგ, მარტივი ალგებრული გარდაქმნებით პირდაპირ მიიღება ის ფაქტი რომ n^2 კენტი რიცხვია:

$$n - \textit{კენტია} \Longrightarrow n = 2k+1 \Longrightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$
$$\Longrightarrow n^2 - \textit{კენტია}.$$

ეს მარტივი მაგალითი გვიჩვენებს იმას, რომ $p \Longrightarrow q$ სახის გამონათქვამების დასამტკიცებლად ზოგჯერ საკმარისია p წინადადებას მიეცეს ისეთი სახე საიდანაც უშუალოდ ჩანს q წინადადების ჭეშმარიტება.

მათემატიკური ინდუქცია

ეს არის დამტკიცების ხერხი, რომელიც ძირითადად გამოიყენება ისეთი გამონათქვამების დამტკიცებისას, რომლებიც ნატურალურ პარამეტრზეა დამოკიდებული. იმის ნაცვლად რომ გამონათქვამი დამტკიცდეს ყოველი ნატურალური რიცხვისათვის ცალკე (რაც პრინციპში შეუძლებელია, რადგან ნატურალური რიცხვების სიმრავლე უსასრულოა), იგი მტკიცდება ერთი საბაზისო შემთხვევისათვის, რომელიც დაკავშირებულია ნატურალური პარამეტრის საწყის მნიშვნელობასთან და შემდეგ მტკიცდება ინდუქციის წესი. ინდუქციის წესის დამტკიცება ნიშნავს იმის დამტკიცებას, რომ თუ გამონათქვამი ჭეშმარიტია ნატურალური პარამეტრის რომელიმე მნიშვნელობისათვის, მაშინ იგი ჭეშმარიტია ამ პარამეტრის მომდევნო მნიშვნელობისთვისაც: დავუშვათ $P(n)$ არის გამონათქვამი, რომლის ჭეშმარიტება უნდა დამტკიცდეს n ნატურალური პარამეტრის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ამისათვის

საკმარისია იმის დამტკიცება, რომ 1. *ჭეშმარიტია* $P(1)$ და 2. *როდესაც ჭეშმარიტია* $P(n)$ *რომელიმე ნატურალური* n *- სათვის, მაშინ ჭეშმარიტია* $P(n+1)$.

კონტრაპოზიცია და საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხი

კონტრაპოზიციის გამოყენება დამტკიცებისას, ეფუძნება მათემატიკური ლოგიკის კანონს, რომელიც ამბობს იმას, რომ პირობითი გამონათქვამი და მისი კონტრაპოზიციური გამონათქვამი ერთმანეთის ლოგიკურად ეკვივალენტურია. უფრო დეტალურად. პირობითი გამონათქვამი ეწოდება ასეთი სახის გამონათქვამს: *"თუ* P *მაშინ* Q*"*, ხოლო მისი კონტრაპოზიციური გამონათქვამი არის *"თუ* $\bar{Q}$ *მაშინ* $\bar{P}$*"*, სადაც $\bar{Q}$ არის Q - ს უარყოფა, ხოლო $\bar{P}$ არის P - უარყოფა. მაგალითად, განვიხილოთ ასეთი პირობითი გამონათქვამი: "*თუ გუნდი ყველა თამაშს მოიგებს, მაშინ იგი ჩემპიონი გახდება*", მისი კონტრაპოზიციური გამონათქვამი ასეთია: "*თუ გუნდი ჩემპიონი ვერ გახდა, მაშინ მას ყველა თამაში არ მოუგია*". ე.ი. თუ ჩვენ გვინდა პირველი გამონათქვამის დასაბუთება კონტრაპოზიციის ხერხით, მაშინ უნდა ვიმსჯელოთ ასე: *თუ გუნდი ჩემპიონი ვერ გახდა, მაშინ მას არ აქვს ყველაზე მეტი ქულა ამიტომ შეუძლებელია რომ ამ გუნდს ყველა თამაში მოეგო. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ გუნდი ყველა თამაშს მოიგებს მაშინ იგი ჩემპიონი გახდება.*

ხშირად დამტკიცების ეს ხერხი ეშლებათ დამტკიცების სხვა ხერხში, რომელსაც ეწოდება ***საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხი*** (reductio ad absurdum - აბსურდამდე დაყვანა). შეიძლება ითქვას, რომ ამ უკანასკნელის ფორმალურ - ლოგიკური საფუძველი იგივეა რაც კონტრაპოზიციის, მაგრამ იგი გამოიყენება არა მხოლოდ პირობითი გამონათქვამების დამტკიცების დროს. საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხი ასეთია. თუ გვსურს რომელიმე P გამონათქვამის დამტკიცება, ამისათვის ვუშვებთ მის საწინააღმდეგოს - $\bar{P}$ - ს. ამის შემდეგ პირდაპირი დამტკიცების ხერხების გამოყენებით ვღებულობთ რომელიღაც Q გამონათქვამს, რომელიც აშკარად მცდარია. ე.ი. სურათი ასეთია: $\bar{P} \Longrightarrow Q$, სადაც Q მცდარია; რადგან Q მცდარია, ამიტომ მისი უარყოფა - $\bar{Q}$ ჭეშმარიტია, ხოლო კონტრაპოზიციის კანონის გამოყენებით გვაქვს რომ დამტკიცებულია $\bar{Q} \Longrightarrow P$; ამიტომ P გამონათქვამი ჭეშმარიტია.

მათემატიკაში საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხით დებულების დამტკიცების კლასიკური მაგალითია მარტივი რიცხვების სიმრავლის უსასრულობის დამტკიცება, რომელიც ევკლიდეს ეკუთვნის. დებულება რომლის დამტკიცებაც მოითხოვება ამბობს: "*მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა*". მის დასამტკიცებლად დავუშვათ საწინააღმდეგო: "ვთქვათ მარტივ რიცხვთა სიმრავლე სასრულია". ვთქვათ ეს სიმრავლეა $P = \{p_1,\ p_2, \dots, p_n\}$. განვიხილოთ რიცხვი $a = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. ამ რიცხვს აქვს რომელიღაც მარტივი გამყოფი p. დაშვების თანახმად იგი უნდა იყოს P - ს ელემენტი. ე.ი. $p = p_i$ რომელიღაც $i \in \{1,2, \dots, n\}$ - სათვის. აქედან გამომდინარეობს, რომ $1 = a - p_1 p_2 \cdots p_n$ იყოფა p_i - ზე რაც შეუძლებელია. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ გამონათქვამი "*მარტივ რიცხვთა სიმრავლე სასრულია*" - მცდარია.

ამ ხერხის გამოყენების მეორე კლასიკური და ძალზე მნიშვნელოვანი მაგალითია **კანტორის თეორემა**. ეს თეორემა ამბობს რომ ნებისმიერი არაცარიელი X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა

სიმრავლის სიმძლავრე უფრო მეტია ვიდრე თვით X - ის სიმძლავრე. ამ თეორემის დამტკიცებისას გამოიყენება ძალზე ეფექტური გზა, რომელსაც **დიაგონალიზაციის** მეთოდი ეწოდება. იგი საკმაოდ მნიშვნელოვანი აღმოჩნდა მათემატიკურ ლოგიკაში და მისი მსგავსი მეთოდების გამოყენებით კიდევ მრავალი მნიშვნელოვანი დებულება დამტკიცდა.

$0.\boxed{0}\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0$ ....
$0.0\,\boxed{1}\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1$ ....
$0.0\,1\,\boxed{0}\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0$ ....
$0.1\,1\,0\,\boxed{1}\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1$ ....
$0.1\,0\,1\,0\,\boxed{1}\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1$ ....
....
....
....
.... ახალი რიცხვი: 0.10100........

უნდა აღინიშნოს, რომ მათემატიკაში (ისევე როგორც ჩვეულებრივ სასაუბრო ენაში) დამტკიცების პროცესში ხშირად შეუძლებელია მხოლოდ ერთი რომელიმე ხერხის გამოყენება. როგორც წესი, დამტკიცება საკმაოდ კომპლექსურია და მსჯელობისას გამოიყენება რამოდენიმე სხვადასხვა ხერხი, ხშირად ისე რომ მათი ერთმანეთისაგან გამიჯვნა და ამოცნობა არც ისე მარტივია. გარდა ამისა, ერთი და იგივე წინადადება შეიძლება დამტკიცდეს რამოდენიმე სხვადასხვა ხერხის გამოყენებით. მაგალითისათვის მოვიყვანთ მარტივი რიცხვების შესახებ აქ დამტკიცებული წინადადების დამტკიცების კიდევ ერთ ვარიანტს.

ფერმას რიცხვები

ფერმას რიცხვი ეწოდება $F_n = 2^{2^n} + 1$ სახის რიცხვს, სადაც $n \in \{0,1,2,\dots\}$.

1. მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით დავამტკიცოთ რომ ფერმას რიცხვებისათვის სრულდება ტოლობა $F_0 \cdot F_1 \cdot F_{n-1} = F_n - 2$ სადაც $n > 0$.

I. როდესაც $n = 1$ გვაქვს $F_0 = F_1 - 2$, რისი ჭეშმარიტებაც შეიძლება უშუალო გამოთვლებით შემოწმდეს.

II. ინდუქციის დაშვების გათვალისწინებით გვაქვს:

$$F_0F_1 \cdots F_n = (F_0F_1 \cdots F_{n-1})F_n = (F_n - 2)F_n = \left(2^{2^n} - 1\right)\left(2^{2^n} + 1\right) = 2^{2^{n+1}} - 1 = F_{n+1} - 2.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ დასამტკიცებელი ტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$ - სათვის.

2. წინა საფეხურზე დამტკიცებული $F_0 \cdot F_1 \cdot F_{n-1} = F_n - 2$ ტოლობის გათვალისწინებით დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი ორი ფერმას რიცხვი ურთიერთმარტივია. დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ რომელიმე F_m - ს და F_n - ს $(m < n)$ აქვს საერთო გამყოფი a. $F_n - 2 = F_0 \cdots F_m \cdots F_{n-1}$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ a უნდა იყოს 2 - ის გამყოფიც. ასეთი შეიძლება იყოს მხოლოდ 1 ან 2. რადგან ყველა ფერმას რიცხვი კენტია, შეუძლებელია რომ a

იყოს 2 - ის ტოლი. ე.ი. ნებისმიერ F_m და F_n - ის საერთო გამყოფი შეიძლება იყოს მხოლოდ 1 - ის ტოლი.

3. ვაჩვენოთ რომ რადგან ფერმას რიცხვების სიმრავლე უსასრულოა და ნებისმიერი ორი მათგანი ურთიერთმარტივია, ამიტომ მარტივი რიცხვების სიმრავლე უსასრულოა. მართლაც, P_n - ით ავღნიშნოთ F_n - ის მარტივი გამყოფების სიმრავლე. წინა საფეხურზე ვაჩვენეთ რომ როდესაც $m \neq n$ მაშინ $P_m \cap P_n = \emptyset$. ამიტომ P_n სიმრავლეების გაერთიანების სიმძლავრე (ელემენტების რაოდენობა) ტოლია ყველა მათგანის სიმძლავრეების ჯამის. რადგან თითოეული მათგანი არაცარიელი სიმრავლეა, ამიტომ ეს ჯამი უსასრულოა.

ე.ი. მარტივი რიცხვების სიმრავლე უსასრულოა.

როგორც ვხედავთ ეს არის საკმაოდ კომპლექსური მსჯელობა, რომელსაც მხოლოდ სადემონ-სტრაციო დანიშნულება აქვს, მაგრამ იგი გვიჩვენებს რომ ერთი და იგივე წინადადება შესაძ-ლებელია დამტკიცდეს რამოდენიმე სხვადასხვა ხერხით და ამავე დროს დამტკიცების პროცესში შესაძლებელია რამოდენიმე სხვადასხვა ხერხის მონაცვლეობით გამოყენება.

დებულებები რომელთა დამტკიცება ისევე როგორც უარყოფა შეუძლებელია

1931 წელს, ცნობილმა მათემატიკოსმა კურტ გიოდელმა, რომელიც მაშინ ავსტრიაში ცხოვრობდა და 25 წლის იყო, დაამტკიცა და გამოაქვეყნა 2 თეორემა. ეს თეორემები ცნობილია როგორც გიოდელის არასრულობის თეორემები. შეიძლება ითქვას, რომ ამ თეორემებმა ბოლო მოუღეს ფორმალური ლოგიკის ყოვლისშემძლეობის მითს. მარტივად რომ ვთქვათ არასრუ-ლობის თეორემების შედეგად გაირკვა რომ არაწინააღმდეგობრივ აქსიომატური თეორიაში შესაძლებელია არსებობდეს ისეთი დებულებები, რომელთათვისაც შეუძლებელია როგორც მათი ჭეშმარიტების ასევე მათი უარყოფის ჭეშმარიტების დამტკიცება. როგორც აღმოჩნდა, ასეთი გადაუჭრელი დებულებები არც ისე ცოტაა კლასიკურ თეორიებში და მათ დამტკი-ცებაზე (ისევე როგორც მათი უარყოფის დამტკიცებაზე) საკმაოდ დიდი დრო და ენერგია დაიხარჯა. მიუხედავად ამისა, დამტკიცებას, ისევე როგორც წმინდა მათემატიკურ - ლოგი-კური მნიშვნელობის მქონე პროცედურას, ასევე მეცნიერულ მეთოდს არ დაუკარგავს თავისი მნიშვნელობა. ექსპერიმენტსა და დაკვირვებასთან ერთად, იგი არის ყოველი სრულყოფილი მეცნიერული თეორიის ერთ-ერთი საფუძველი.

უნდა შევნიშნოთ, რომ თავისთავად ამ დებულების დამტკიცებისას გამოიყენება ზევრი ძალზე ეფექტური და საინტერესო ხერხი (მათ შორის, ზემოაღნიშნული კანტორის დიაგონალიზაციის მეთოდის მსგავსი), რომლებსაც მომავალ სტატიებში შევეხებით.